

תרגיל 7 בפונקציות מרוכבות

1. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות

(א) אם לכל z מתקיים $f(z) = f(iz)$ אז f קבועה

(ב) אם לכל z מתקיים $f(z) = f(3z)$ אז f קבועה

2. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת כי $|f(z)| \leq M|z|^n$ עבור $M > 0$ כלשהוא. הוכיחו כי $f(z)$ היא פולינום ממעלה n לכל היותר. רמז: חזרו על ההוכחה של משפט ליוביל.

3. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת $|f(z) - f(2z)| \leq 10$, הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

4. מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)} \quad (\text{א})$$

$$z \neq 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 3^n} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n \quad (\text{ב})$$

$$|z| = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-z^n}{1+z^n} \quad (\text{ג})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!(z^3 - i)^n \quad (\text{ד})$$

5. מצאו את טור טיילור של הפונקציות הבאות:

$$z = 0 \quad \text{סביב } z^2 \sin z \quad (\text{א})$$

$$z = \frac{\pi}{2} \quad \text{סביב } z^2 \sin z \quad (\text{ב})$$

$$z = 0 \quad \text{סביב } \frac{z}{z^4+9} \quad (\text{ג})$$