<u>גאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית – פתרון תרגיל 1</u>

1. ניתן שתי הוכחות.

הוכחה אלגברית: נרשום $u=u^ie_i, v=v^ie_i$ ואז

$u\times v=\left(u^2v^3-u^3v^2\right)e_1+\left(u^3v^1-u^1v^3\right)e_2+\left(u^1v^2-u^2v^1\right)e_3$ מכאן

$\|u\times v\|^2=\left(u^2v^3-u^3v^2\right)^2+\left(u^3v^1-u^1v^3\right)^2+\left(u^1v^2-u^2v^1\right)^2$ ומצד שני,

$$\|u\|^2\|v\|^2-\langle u,v\rangle^2=\left[\left(u^1\right)^2+\left(u^2\right)^2+\left(u^3\right)^2\right]\left[\left(v^1\right)^2+\left(v^2\right)^2+\left(v^3\right)^2\right]-\left(u^1v^1+u^2v^2+u^3v^3\right)^2$$

חישוב מפרך מראה ששניהם שווים.

הוכחה גאומטרית: $\|u\times v\|=\|u\|\|v\|\sin\theta$ (θ היא הזווית החדה בין הווקטורים), ומכאן

$$\|u\times v\|^2=\|u\|^2\|v\|^2\sin^2\theta=\|u\|^2\|v\|^2\left(1-\cos^2\theta\right)=\|u\|^2\|v\|^2-\left(\|u\|\|v\|\cos\theta\right)^2=\|u\|^2\|v\|^2-\langle u,v\rangle^2$$

2. א. $b\times c=\left(b^2c^3-b^3c^2\right)e_1+\left(b^3c^1-b^1c^3\right)e_2+\left(b^1c^2-b^2c^1\right)e_3$ ומכאן

$$a\times\left(b\times c\right)=\left[a^2\left(b^1c^2-b^2c^1\right)-a^3\left(b^3c^1-b^1c^3\right)\right]e_1+\left[a^3\left(b^2c^3-b^3c^2\right)-a^1\left(b^1c^2-b^2c^1\right)\right]e_2$$
$$+\left[a^1\left(b^3c^1-b^1c^3\right)-a^2\left(b^2c^3-b^3c^2\right)\right]e_3$$

אפשר לחשב גם את אגף ימין, ולראות שהם שווים.

ב. גם כאן, חישוב ארוך נותן את התוצאה.

3. א. נוכיח כי הווקטורים $u,v,u\times v$ מאונכים זה לזה ובעלי אורך יחידה.

כבר נתון כי u,v מאונכים זה לזה (אורתונורמליים), והעובדה ש- $u\times v$ מאונך לשניהם נובעת מתכונות המכפלה הווקטורית.

נתון גם כי u,v בעלי אורך יחידה, וע"פ זהות לגראנז' $\|u\times v\|^2=\|u\|\|v\|^2-\langle u,v\rangle^2=1-0=1$.
נוציא שורש כדי לקבל כי גם $u\times v$ הוא בעל אורך יחידה.

ב. נעזר בשאלה 2.

$$\left(u\times v\right)\times u=-u\times\left(u\times v\right)=-\left(\langle u,v\rangle u-\langle u,u\rangle v\right)=v$$

$$\left(u\times v\right)\times v=-v\times\left(u\times v\right)=-\left(\langle v,v\rangle u-\langle v,u\rangle v\right)=-u$$

המשמעות הגאומטרית:

במקרה הראשון התוצאה היא וקטור המאונך ל- $u\times v$ וגם ל- u ואורכו 1. זה משאיר שתי אפשרויות, $\pm v$. הסימן פלוס נקבע ע"פ כלל יד ימין.

במקרה השני התוצאה היא וקטור המאונך ל- $u\times v$ וגם ל- v ואורכו 1. זה משאיר שתי אפשרויות, $\pm u$. הפעם כלל יד ימין מראה שחייבים לבחור בסימן מינוס.

4. הווקטור $n=v_1\times v_2$ מאונך לשני הישרים, ולכן המרחק בין הישרים מתקבל ע"י הטלת הווקטור a_2-a_1 בכוון $v_1\times v_2$: $d=\left|\left(a_2-a_1\right)\bullet\frac{n}{\|n\|}\right|=\left|\left(a_2-a_1\right)\bullet\left(\frac{v_1\times v_2}{\|v_1\times v_2\|}\right)\right|$

5.א. $a^i_j b^j_k c^k_s=a^i_1b^1_1c^1_s+a^i_1b^1_2c^2_s+a^i_1b^1_3c^3_s+a^i_2b^2_1c^1_s+a^i_2b^2_2c^2_s+a^i_2b^2_3c^3_s+a^i_3b^3_1c^1_s+a^i_3b^3_2c^2_s+a^i_3b^3_3c^3_s$

ב.

$$a_{ij}v^iv^j=a_{11}v^1v^1+a_{12}v^1v^2+a_{13}v^1v^3+a_{21}v^2v^1+a_{22}v^2v^2+a_{23}v^2v^3+a_{31}v^3v^1+a_{32}v^3v^2+a_{33}v^3v^3$$

ג. $\delta_{ij}a^{ij}=a^{11}+a^{22}+a^{33}$

6. $Tr\left(AB\right)=\left(AB\right)^i_i=A^i_kB^k_i=B^k_iA^i_k=\left(BA\right)^k_k=Tr\left(BA\right)$

7.

$$\left[A\left(B+C\right)\right]^i_j=A^i_k\left(B+C\right)^k_j=A^i_k\left(B^k_j+C^k_j\right)=A^i_kB^k_j+A^i_kB^k_j+A^i_kC^k_j=\left[AB\right]^i_j+\left[AC\right]^i_j=\left[AB+AC\right]^i_j$$

(ניתן להוכיח גם $\left(A+B\right)C=AC+BC$ באופן זהה)

8. $\delta^i_j\delta^j_k\delta^k_i=\sum_{i,j,k=1}^n\delta^i_j\delta^j_k\delta^k_i$. מחובר כללי בסכום ייתן 1 או"א $i=j=k$ ויש n מחוברים כאלו.

לכן הביטוי שווה n