פתרון לתרגיל 7

שאלה 1
גזרו את הפונקציה

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} cos(t^2)dt,\ x > 0$$

פתרון:
$F^{'}(x) = cos(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - cos(\frac{1}{x^2}) \cdot (-\frac{1}{x^2}) = \frac{cos(x)}{2\sqrt{x}} + \frac{cos(\frac{1}{x^2})}{x^2}$

שאלה 2
מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה

$$F(x) = \int_0^x \frac{sin(t)}{t}dt,\ x > 0$$

פתרון:
נשים לב ש-$\frac{sin(t)}{t}$ אינה מוגדרת ב-$x=0$ אבל יש לה גבול שם, כלומר:
$lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x} = 1$ ולכן נוסיף את הנקודה הזאת לתחום ההגדרה, כלומר נגדיר פונקציה חדשה:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{sin(x)}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

ברור ש:$F(x) = \int_0^x G(t)dt = \int_0^x \frac{sin(t)}{t}dt$
כדי למצוא את נקודות הקיצון, נגזור את $F(x)$ ונשווה אותה לאפס:
$F^{'}(x) = \left(\int_0^x G(t)dt\right)^{'} = \frac{sin(x)}{x} = 0$ אם ורק אם $sin(x) = 0$
ולכן $x = \pi k$ כאשר $k \in \mathbb{N}$ (כי התחום שלנו הוא $x > 0$)
כדי לוודא שאלה נקודות קיצון, נגזור את F פעמיים ונבדוק את הסימן שלה בנקודות שחשודות לקיצון
$F^{''}(x) = \frac{cos(x)\cdot x - sin(x)}{x^2}$
אם $k = 2n$ מספר זוגי אזי $F^{''}(x) = F^{''}(\pi k) = F^{''}(2\pi n) = \frac{1}{2\pi n} > 0$ ולכן כאשר k הוא זוגי, זו נקודת מינימום.

אם $k = 2n+1$ אי זוגי אזי $F^{''}(x) = F^{''}((2n+1)\pi) = -\frac{1}{(2n+1)\pi} < 0$ ולכן כאשר k אי זוגי אזי זו נקודת מקסימום.

שאלה 3
חשבו את הגבולות הבאים:
א) $lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} ln(sin(t))dt}{cos^2(x)} = lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ln(sin(x))}{-sin(2x)} = lim\frac{\left(\frac{cos(x)}{sin(x)}\right)}{-2cos(2x)} = 0$
ב) $lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} sin(\sqrt{t})dt}{x^3} = lim_{x\to 0}\frac{sin(x)\cdot 2x}{3x^2} = \frac{2}{3}$

1. $$\int_1^e \frac{\ln^2(x)}{\sqrt{x}}dx = \left\{\begin{matrix} f' = \frac{1}{\sqrt{x}} & g = \ln^2(x) \\ f = 2\sqrt{x} & g' = \frac{2\ln(x)}{x} \end{matrix}\right\} = \left[2\sqrt{x}\ln^2(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{4\ln(x)}{\sqrt{x}}dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} f' = \frac{4}{\sqrt{x}} & g = \ln(x) \\ f = 8\sqrt{x} & g' = \frac{1}{x} \end{matrix}\right\} = \left[2\sqrt{x}\ln^2(x) - 8\sqrt{x}\ln(x)\right]_1^e + \int_1^e \frac{8}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\ln^2(x) - 8\sqrt{x}\ln(x) + 16\sqrt{x}\right]_1^e =$$

$$= \left(2\sqrt{e} - 8\sqrt{e} + 16\sqrt{e}\right) - 16 = 10\sqrt{e} - 16$$

2. $$\int_{e^{-1}}^e |\ln(x)|\,dx$$

על מנת להפטר מהערך המוחלט, נחלק לתחומים לפי השליליות של הפונקציה.

$$\int_{e^{-1}}^e |\ln(x)|\,dx = \int_{e^{-1}}^1 |\ln(x)|\,dx + \int_1^e |\ln(x)|\,dx = \int_{e^{-1}}^1 \left(-\ln(x)\right)dx + \int_1^e \ln(x)dx = \left[-\left(x\ln(x) - x\right)\right]_{e^{-1}}^1 + \left[x\ln(x) - x\right]_1^e =$$

$$= 1 - \frac{2}{e} + 1 = 2 - \frac{2}{e}$$

3. $\int_0^{\pi} e^x \cos^2(x)dx = \left\{\begin{matrix} f' = e^x & g = \cos^2(x) \\ f = e^x & g' = -2\cos(x)\sin(x) = -\sin(2x) \end{matrix}\right\} = \left[e^x \cos^2(x)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \sin(2x)dx =$

ראשית נחשב את $\left[e^x \cos^2(x)\right]_0^{\pi} = e^{\pi} - e^0 = e^{\pi} - 1$

כעת נחשב את השטח

$$I = \int_0^{\pi} e^x \sin(2x)dx = \left\{\begin{matrix} f' = e^x & g = \sin(2x) \\ f = e^x & g' = 2\cos(2x) \end{matrix}\right\} = \left[e^x \sin(2x)\right]_0^{\pi} - 2\int_0^{\pi} e^x \cos(2x)dx =$$

$$= 0 - 2\int_0^{\pi} e^x \cos(2x)dx = \left\{\begin{matrix} f' = e^x & g = \cos(2x) \\ f = e^x & g' = -2\sin(2x) \end{matrix}\right\} = -2\left[e^x \cos(2x)\right]_0^{\pi} - 4\int_0^{\pi} e^x \sin(2x)dx$$

חזרנו למקורות ולכן ביחד

$$I = -2\left[e^x \cos(2x)\right]_0^{\pi} - 4I = -2\left(e^{\pi} - 1\right) - 4I$$

ולכן $I = -\frac{2}{5}\left(e^{\pi} - 1\right)$

וסה"כ $\int_0^{\pi} e^x \cos^2(x)dx = \left(e^{\pi} - 1\right) - \frac{2}{5}\left(e^{\pi} - 1\right) = \frac{3}{5}\left(e^{\pi} - 1\right)$

4. $\int_0^{0.5} x\sqrt{1-x^2}dx = \left\{\begin{matrix} t = 1 - x^2 \\ dt = -2xdx \\ x = 0 \to t = 1 \\ x = 0.5 \to t = 0.75 \end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}\int_1^{0.75} \sqrt{t}dt = -\frac{1}{2}\left[\frac{t^{1.5}}{1.5}\right]_1^{0.75} = -\frac{1}{2}\left(\frac{0.75^{1.5}}{1.5} - \frac{1}{1.5}\right)$

5. $$\int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{x^4-1} = \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} =$$

נפרק לשברים חלקים זריז:

$$= \int_{\sqrt{3}}^{3} \frac{dx}{(x^2+1)(x+1)(x-1)} = \int_{\sqrt{3}}^{3} \left(-\frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x-1)} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\Big[-2\arctan(x) - \ln|x+1| + \ln|x-1| \Big]_{\sqrt{3}}^{3} =$$

$$= \frac{1}{4}\big(-2\arctan(3) - \ln(4) + \ln(2)\big) - \frac{1}{4}\Big(-2\arctan(\sqrt{3}) - \ln(1+\sqrt{3}) + \ln(\sqrt{3}-1)\Big)$$

6. $$\int_{e^{-1}}^{1} \frac{dx}{x + x\ln^2(x)} = \int_{e^{-1}}^{1} \frac{1}{x} \frac{1}{1+\ln^2(x)} dx = \left\{ \begin{array}{l} t = \ln(x) \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ x = e^{-1} \to t = -1 \\ x = 1 \to t = 0 \end{array} \right\} = \int_{-1}^{0} \frac{dt}{1+t^2} = \big[\arctan(t)\big]_{-1}^{0} = \frac{\pi}{4}$$

7. $$\int_{0}^{1} \frac{|x-1|}{|x-2|+3} dx = \int_{0}^{1} \frac{1-x}{2-x+3} dx = \int_{0}^{1} \left(1 + \frac{4}{x-5}\right) dx = \big[x + 4\ln|x-5|\big]_{0}^{1} = \big(1+4\ln(4)\big) - \big(4\ln(5)\big)$$