פתרון בחינה בחשבון אינפיניטסימלי 2 מדמ"ח — 89-133

מועד א' תשע"ו

1. חשבו את האינטגרלים הלא מסויימים הבאים:

(א)

$$\int x^2 \ln(x^2+x-2)dx$$

(ב)

$$\int \frac{\ln^2(x)}{x}dx$$

<u>**פתרון סעיף א':**</u> את סעיף א' נתחיל באינטגרציה לפי חלקים: היות ויש לנו לוגריתם כפול פולינום, נגזור את הלוגוריתם (כדי לקבל פונקציה רציונלית) ונעשה אינגרציה לפולינום.

$$\begin{aligned}
\int x^2 \ln(x^2+x-2)dx &= \frac{1}{3}x^3\ln(x^2+x-2) - \int (\frac{1}{3}x^3)\cdot\frac{2x+1}{x^2+x-2}dx \\
&= \frac{1}{3}x^3\ln(x^2+x-2) - \frac{1}{3}\int \frac{2x^4+x^3}{x^2+x-2}dx
\end{aligned}$$

עכשיו דרגת המונה (4) גדולה־שווה לדרגת המכנה (2) ולכן צריך לעשות חילוק פולינומים, כדי להביא את האינטגרל באגף ימין למצב בו ניתן לפתור ע"י שברים חלקיים. נחשב:

$$\begin{aligned}
2x^4+x^3 &= 2x^2(x^2+x-2) - x^3 + 4x^2 \\
&= 2x^2(x^2+x-2) - x(x^2+x-2) + 5x^2 - 2x \\
&= 2x^2(x^2+x-2) - x(x^2+x-2) + 5(x^2+x-2) - 7x + 10 \\
&= (2x^2-x+5)(x^2+x-2) - 7x + 10
\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^4-x^3}{x^2+x-2}dx &= \int (2x^2-x+5)dx + \int \frac{-7x+10}{x^2+x-2}dx \\
&= \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x + \int \frac{-7x+10}{(x+2)(x-1)}dx
\end{aligned}$$

עכשיו ניתן לבצע שברים חלקיים, ניקח

$$\frac{-7x+10}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+(2A-B)}{(x+2)(x-1)}$$

המוביל למערכת משוואות

$$\begin{aligned} A+B &= -7 \\ 2A-B &= 10 \end{aligned}$$

שפתרונה $B=-8$, $A=1$.
לכן

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln(x^2+x-2)dx &= \frac{1}{3}x^3\ln(x^2+x-2) - \frac{1}{3}\int \frac{2x^4+x^3}{x^2+x-2}dx \\ &= \frac{1}{3}x^3\ln(x^2+x-2) - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x + \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{8}{x+2}dx\right) \\ &= \frac{1}{3}x^3\ln(x^2+x-2) - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{8}{3}\ln|x+2| + C \end{aligned}$$

ניתן גם להתחיל את התרגיל בפירוק

$$\ln(x^2+x-2) = \ln[(x+2)(x-1)] = \ln(x+2) + \ln(x-1)$$

כך שהאינטגרל שלנו מתפרק לשניים

$$\int x^2\ln(x^2+x-2)dx = \int x^2\ln(x+2)dx + \int x^2\ln(x-1)dx$$

ולפתור כל אחד ע"י אינטגרציה לפי חלקים; זה עוקף את הצורך בביצוע שברים חלקיים בהמשך, על חשבון העובדה שצריך לעשות פעמיים את האינטגרציות לפי חלקים בנפרד.
<u>פתרון סעיף ב'</u>: כאן יש שני פתרונות אפשריים. הישיר ביותר הוא לבצע את ההצבה $u=\ln(x)$ עבורו $du=\frac{1}{x}dx$, ולכן

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln^2(x)}{x}dx &= \int \ln^2(x)\cdot\frac{1}{x}dx \\ &= \int u^2 du \\ &= \frac{1}{3}u^3 + C \\ &= \frac{1}{3}\ln^3(x) + C \end{aligned}$$

השיטה השניה הוא להשתמש באינטגרציה לפי חלקים כדי להמיר את הלוגוריתם לפונקציה רציונלית. לכן באינטגרציה לפי חלקים נגזור את הלוגוריתם ונעשה

אינטגרל ל־$\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned}\int \ln^2(x)\cdot\frac{1}{x}dx &= \ln^2(x)\cdot\ln(x)-\int\left(2\ln(x)\cdot\frac{1}{x}\right)\cdot\ln(x)dx\\ &= \ln^3(x)-2\int\ln^2(x)\cdot\frac{1}{x}dx\\ 3\int\frac{\ln^2(x)}{x}dx &= \ln^3(x)+C\\ \int\frac{\ln^2(x)}{x} &= \frac{\ln^3(x)}{3}+C\end{aligned}$$

בהסכמה עם הפתרון הקודם.

2. קבעו לכל אינטגרל האם הוא מתכנס:

(א)

$$\int_0^2\frac{x+1}{\sqrt{|x-1|}(x-3)^2}dx$$

(ב)

$$\int_2^4\frac{x+1}{\sqrt{|x-1|}(x-3)^2}dx$$

(ג)

$$\int_4^\infty\frac{x+1}{\sqrt{|x-1|}(x-3)^2}dx$$

<u>פתרון:</u> הפונקציה $\frac{x+1}{\sqrt{|x-1|}(x-3)^2}$ רציפה בכל $\mathbb{R}$ פרט לנקודות $x=1,3$ שבהן המכנה מתאפס. לכן באינטגרל הראשון בסעיף א' ישנה נקודה בעייתית אחת ב־1, בסעיף ב' נקודה אחת בעייתית ב־3 , ובסעיף ג' הבעייתיות היחידה היא בגבול ב־∞.

בסעיף א', הפונקציה $\frac{x+1}{(x-3)^2}$ רציפה ב־1 ואינה מתאפסת, ורואים

$$\lim_{x\to1}\frac{\frac{x+1}{\sqrt{|x-1|}(x-3)^2}}{\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{(x-3)^2}=\frac{1}{2}$$

ולכן האינטגרל בסעיף א' מתכנס או מתבדר יחד עם האינטגרל

$$\int_0^2\frac{1}{\sqrt{|x-1|}}dx=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx+\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$$

כל אחד משני האינטגרלים באגף ימין שווה דרך הצבה לאינטגרל

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}}du == \lim_{\epsilon\to 0} 2\sqrt{u}\Big|_\epsilon^1 = 2 < \infty$$

והאינטגרל מתכנס.
בסעיף ב', הפונקציה $\frac{x+1}{\sqrt{|x-1|}}$ רציפה ב־3 ואינה מתאפסת, ורואים

$$\lim_{x\to 3} \frac{\frac{x+1}{\sqrt{|x-1|}(x-3)^2}}{\frac{1}{(x-3)^2}} = \lim_{x\to 3} \frac{x+1}{\sqrt{|x-1|}} = \frac{4}{2} = 2$$

ולכן האינטגרל בסעיף ב' מתכנס או מתבדר יחד עם האינטגרל

$$\int_2^4 \frac{1}{(x-3)^2}dx = \int_2^3 \frac{1}{(x-3)^2}dx + \int_3^4 \frac{1}{(x-3)^2}dx$$

כל אחד משני האינטגרלים באגף ימין שווה דרך הצבה לאינטגרל

$$\int_0^1 \frac{1}{u^2}du = \lim_{\epsilon\to 0} -\frac{1}{u}\Big|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} - 1 = \infty$$

והאינטגרל מתבדר.
בסעיף ג', אנחנו צריכים לבחון את התנהגות הפונקציה $\frac{x+1}{\sqrt{|x-1|}(x-3)^2}$ כאשר $x\to\infty$. כאשר x הוא גדול מאוד, ה־$+1$ במונה זניח ביחס ל־x, וכנ"ל ה־-1 וה־-3 המופיעים במכנה, ולכן אנחנו מצפים שפונקציה זו תתנהג כמו

$$\frac{x}{\sqrt{x}x^2} = x^{1-(0.5+2)} = x^{-1.5}$$

ואכן, רואים

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x+1}{\sqrt{|x-1|}(x-3)^2}}{x^{-1.5}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{1.5}(x+1)}{(x-1)^{0.5}(x-3)^2} = 1$$

והאינטגרל שלנו מתכנס או מתבדר יחד עם האינטגרל

$$\int_4^\infty x^{-1.5}dx = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{-0.5}x^{-0.5}\Big|_4^\infty = \lim_{R\to\infty} \frac{-2}{\sqrt{R}} + \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$$

והאינטגרל מתכנס.

3. תהי $f(x)$ בעלת נגזרת רציפה בכל $\mathbb{R}$.

(א) <u>הוכיחו/הפריכו:</u> אם $f'(x)$ זוגית, אז $f(x)$ אי־זוגית.

(ב) <u>הוכיחו/הפריכו:</u> אם $f'(x)$ אי־זוגית, אז $f(x)$ זוגית.
(תזכורת: $f(x)$ זוגית אמ"מ $f(x)=f(-x)$ לכל x, ו־$f(x)$ אי־זוגית אמ"מ $f(x)=-f(-x)$ לכל x.)

<u>פתרון:</u> שים לב, אנחנו יודעים ש־$f(x)$ היא פונקציה קדומה של $f'(x)$, אבל לא יודעים איזו— ישנה משפחה אינסופית של פונקציות קדומות, השונות אחת מהשנייה בקבוע.
מה שכן נכון, הוא העובדה הבאה: אם נגדיר $g(x)=\int_0^x f'(t)dt$, שהיא אחת הפונקציות הקדומות של $f'(x)$, אז נקבל דרך הצבה $u=-t$

$$g(x)=\int_0^x f'(t)dt=-\int_0^{-x} f'(-t)dt$$

אם $f'(x)$ זוגית, אז זה אומר

$$g(x)=-\int_0^{-x} f'(-t)dt=-\int_0^{-x} f'(t)=-g(-x)$$

ולכן $g(x)$ אי־זוגית. ולהיפך, אם $f'(x)$ אי־זוגית, אזי

$$g(x)=-\int_0^{-x} f'(-t)dt=\int_0^{-x} f'(t)=g(-x)$$

ואז $g(x)$ זוגית.
עכשיו נתחיל מסעיף ב': אם $f'(x)$ אי־זוגית, אז אנחנו יודעים שאחת הפונקציות הקדומות, $g(x)=\int_0^x f(t)dt$, היא זוגית. היות ־$f(x)$ היא גם פונקציה קדומה של $f'(x)$, אנחנו יודעים שקיים קבוע $C\in\mathbb{R}$ כך ש:$f(x)=g(x)+C$. לכן, מכיוון ש־$g(x)$ זוגית, נקבל

$$f(x)=g(x)+C=g(-x)+C=f(-x)$$

ולכן $f(x)$ זוגית.
אמנם, בסעיף א', למרות ש־$g(x)$ אי־זוגית, פונקציה קבועה שונה מ־0 אינה אי־זוגית, ולכן הוספת קבוע (שונה מ־0) יתן פונקציה $f(x)$ אשר אינה אי־זוגית. ההפרכה הפשוטה ביותר: אם $f'(x)=0$ זהותית— שזו פונקציה זוגית— הפונקציה $g(x)=0$ זהותית גם כן היא אמנם אי־זוגית, אך כל פונקציה קדומה אחרת, לדוגמא $f(x)=1$, אינה אי־זוגית.

.4

(א) חשבו את $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}$.
(ב) חשבו את $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}$.

<u>פתרון:</u> אנחנו רוצים לבטא את הסכומים האלה כטורי טיילור של פונקציה

מוכרת, בנקודה מסויימת (כפי שהדגשתי בהרצאות: זהו כמעט הכלי היחיד שיש לכם כדי ל**חשב** סכום של טור!). ניתן כמובן להדביק x^n לכל איבר ולחשב בנקודה $x = 1$, אך החזקות 2^n במכנה מצביע על נסיון מושכל יותר לראות את הטורים כטורי טיילור בנקודה $x = \frac{1}{2}$. לכן נגדיר

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \\ g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) x^n \end{aligned}$$

ונחשב את $f\left(\frac{1}{2}\right)$ עבור סעיף א', ואת $g\left(\frac{1}{2}\right)$ עבור סעיף ב'. נשאר לזהות לאיזו פונקציות הטורים האלה מתכנסים.

בסעיף א', אנחנו מזהים שמדובר בנגזרת איבר־איבר של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. רדיוס ההתכנסות של טור זה הוא כידוע 1, ולכן בתוך הקטע הפתוח $(-1, 1)$ מותר לגזור את הטור איבר־איבר ולקבל טור המתכנס לנגזרת של הפונקציה הגבולית $\frac{1}{1-x}$. כלומר,

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{(1/2)^2} = 4$$

בסעיף ב', נתחיל שוב מהטור $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, והפעם נגזור פעמיים כדי לקבל

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3}$$

זה לא בדיוק הטור שמתכנס ל־$g(x)$, ולכן נצטרך לעשות כמה מניפולציות. ראשית, נזיז את האינדקס כדי לקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n x^{n-1} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

עכשיו צריך רק להכפיל ב־x כדי לקבל

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) n x^n = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

ואחרי הצבה $x = 1/2$ מסיימים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \cdot 0.5}{(0.5)^3} = 8$$

5. זכרו כי $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$. האם הטור מתכנס במידה שווה בכל $\mathbb{R}$? הסבירו.
(רמז: השתמשו במבחן ה־$\lim$ של ה־$\sup$.)

פתרון: נתון בשאלה (וידוע מההרצאות) שהטור מתכנס נקודתית ל־$\cos(x)$ עבור כל $x \in \mathbb{R}$. אנחנו אפילו יודעים שהתכנסות זו היא במידה שווה על כל קטע סגור; השאלה היא לגבי התכנסות במידה שווה על כל $\mathbb{R}$.
אז נתחיל, לפי הרמז, במבחן ה־$\lim$ של ה־$\sup$. הטור הוא סדרת הסכומים החלקיים

$$\cos(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

ולכן צריך לבדוק אם

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \cos(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \right|$$

שואף ל־0 . שימו לב, כפי שכבר הזכרנו, ידוע שההתכנסות היא במידה שווה על קטים סגורים, ולכן מן הסתם מה שיקבע התכנסות במידה שווה על $\mathbb{R}$ או לא, זו ההתנהגות של ההפרש כאשר x שואף לקצוות $\pm\infty$.
נשים לב, כי עבור כל N הסכום החלקי $\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ הוא פולינום, לא קבוע לכל $N \geq 1$. לכן, לכל N מתקיים

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = \pm\infty$$

כי פולינומים לא קבועים תמיד שואפים לפלוס/מינוס אינסוף כאשר x שואף לאינסוף (או למינוס־אינסוף). מאידך, $|\cos(x)| \leq 1$ חסום על $\mathbb{R}$; לכן, ההפרש

$$\lim_{x\to\infty} \left| \cos(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \right| = \infty$$

לכל $N \geq 1$, ואז בהכרח

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \cos(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \right| = \infty$$

עבור כל $N \geq 1$. ולכן כמובן אינו שואף לאפס כאשר $N \to \infty$, ומסיקים שההתכנסות אינה במידה שווה בכל $\mathbb{R}$.
(הערה: ניתן להוכיח שטור טיילור מתכנס במידה שווה בכל $\mathbb{R}$ אם ורק אם הוא מתכנס לפולינום— כלומר, טור סופי.)

6. תהי f רציפה בכל $\mathbb{R}$, ונגדיר פונקציה של שני משתנים $h(x,y) = \int_x^y f(t)dt$.

() הוכיחו כי לכל נקודה $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ מתקיים כי $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 0$ אם ורק אם $\frac{\partial h}{\partial y}(y,x) = 0$.

() אם הפונקציה המקורית הינה $f(t) = t$, הוכיחו כי קיימת ל־$h(x,y)$ נקודה קריטית יחידה, והיא נקודת אוכף.

<u>**פתרון סעיף א'**</u>: נחשב את הנגזרות החלקיות של $h(x,y)$ לפי משפט היסוד של חדו"א

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\int_y^x f(t)dt\right) = -f(x)\\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= f(y)\end{aligned}$$

נשים לב שהשורה האחרונה חשב לנו את הנגזרת החלקית לפי y בנקודה (x,y); אנחנו רוצים בנקודה (y,x) ולכן מחליפים את התפקידים של x ו־y כדי לקבל

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial y}(y,x) &= f(x)\\ \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= -f(x)\end{aligned}$$

ולכן $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 0$ אמ"מ $-f(x) = 0$ אמ"מ $f(x) = 0$ אמ"מ $\frac{\partial h}{\partial y}(y,x) = 0$.
<u>**פתרון סעיף ב'**</u>: יש כאן שני פתרונות אפשריים. האחד הוא להעזר בסעיף א', להציב $f(t) = t$ בנגזרות החלקיות שכבר חשבנו ולקבל

$$\begin{aligned}0 = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= -f(x) = -x\\ 0 = \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= f(y) = y\end{aligned}$$

ולכן פתרון המערכת מחייב $x = 0 = y$ והנקודה הקריטית היחידה היא $(0,0)$.
חישוב הנגזרות החלקיות מסדר 2 מראה שהמטריצה ההסיאנית היא

$$H(0,0) = \begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

שהיא לא־מוחלטת ולכן $(0,0)$ היא נקודת אוכף.
הפתרון השני, הוא פשוט לחשב את

$$h(x,y)=\int_x^y tdt=\frac{1}{2}t^2\Big|_x^y=y^2-x^2$$

ולגזור אותה ישירות, לקבל את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון ושני ולהמשיך באותו דרך. פתרון זה לא דורש שימוש בסעיף א'.

7. מצא את הערך המקסימלי והערך המינימלי של הפונקציה $f(x,y)=x^2+2x+y^2-2y$ בתחום $\{(x,y): x^2+y^2\leq 4\}$.

פתרון: קודם כל נחפש נקודות קריטיות בפנים התחום, ע"י איפוס הגרדיאנט $\nabla f=(0,0)$ השקול למערכת

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x}=2x+2 \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y}=2y-2 \end{aligned}$$

המובילה לפתרון יחיד $(-1,1)$, שהיא נקודה חשודה. ניתן גם לחשב בקלות את המטריצה הסיאנית

$$H(1,0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-1,1) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(-1,1) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

שהיא בבירור חיובית לחלוטין (אלכסונית עם מקדמים חיוביים, ע"ע חיוביים 2, דטרמיננטה חיובית $\det H(-1,1)=4>0$ ועקבה חיובית $tr(H(-1,1))=4>0$, או בכל דרך אחרת), ולכן $(-1,1)$ היא נקודת מינימום מקומי. מידע זה אינו חיוני להמשך התרגיל, אך כפי שאני ממליץ כדאי לבדוק את זה בכל מקרה כדי לתפוס שגיאות בהמשך!
עכשיו נבדוק נקודות על השפה, כלומר נקודות קיצון של $f(x,y)$ תחת האילוץ $g(x,y)=x^2+y^2=4$. זה מוביל לתנאי $\nabla f=\lambda\nabla g$ יחד עם האילוץ עצמו, שמוביל למערכת

$$\begin{aligned} 2x+2 &= \lambda 2x \\ 2y-2 &= \lambda 2y \\ x^2+y^2 &= 4 \end{aligned}$$

ישנם כמה דרכים לפתור מערכת זו— ניתן לפתור עבור λ באמצעות x במשוואה הראשונה ולהציב בשניה, או להיפך, ואז להציב במשוואה השלישית— הדרך הקצרה יותר בעיני היא לסכום את המשוואה הראשונה עם השניה כדי לקבל

$$\begin{aligned} 2(x+y) &= 2\lambda(x+y) \\ (x+y)(1-\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

המשוואה האחרונה דורשת או $x+y=0$, דהיינו $x=-y$, או $\lambda=1$. אבל הצבת $\lambda=1$ מוביל לסתירה ($2=0$ במשוואה הראשונה או $-2=0$ במשוואה השניה) ולכן הפתרונות היחידים מקיימים $x=-y$. הצבה במשוואה האחרונה מובילה למשוואה

$$\begin{aligned} x^2+(-x)^2 &= 4 \\ 2x^2 &= 4 \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned}$$

ולכן הפתרונות היחידים הם $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ ו־$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

בסה"כ יש לנו שלוש נקודות חשודות; נציב אותם בפונקציה $f(x,y)$ ונקבל

$$\begin{aligned} f(-1,1) &= (-1)^2+2(-1)+(1)^2-2(1)=-2 \\ f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) &= (\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}+(-\sqrt{2})^2-2(-\sqrt{2}) \\ &= 2+2\sqrt{2}+2+2\sqrt{2}=4+4\sqrt{2}\approx 9.66 \\ f(-\sqrt{2},\sqrt{2}) &= (-\sqrt{2})^2+2(-\sqrt{2})+(\sqrt{2})^2-2(\sqrt{2}) \\ &= 2-2\sqrt{2}+2-2\sqrt{2}=4-4\sqrt{2}\approx -1.66 \end{aligned}$$

ורואים שהערך המינימלי הוא -2 המתקבל בנקודה $(-1,1)$, והערך המקסימלי הוא $4+4\sqrt{2}$ המתקבל בנקודה $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

(שים לב שזה מסתדר עם העובדה ש־$f(-1,1)$ הוא מינימום מקומי!)

הערה: בתרגיל זה יש גם דרך קיצור גיאומטרי להגיע לתשובה. נשים לב כי

$$f(x,y)=(x+1)^2+(y-1)^2-2$$

היא, עד כדי קבוע -2, המרחק־בריבוע בין (x,y) לבין $(-1,1)$. כלומר, פונקציה זו תקבל ערך מינימלי עבור נקודה (x,y) בתחום הקרובה ביותר ל־$(-1,1)$, וערך מקסימלי עבור הנקודה הרחוקה ביותר ממנה. הנקודה $(-1,1)$ נמצאת בתחום וכמובן הקרובה ביותר: מרחק 0, ולכן $f(-1,1)=-2$. ומציור גיאומטרי אפשר לראות שהנקודה הרחוקה ביותר בדיסק נמצאת ב־$(\sqrt{2},-\sqrt{2})$, ולחשב את הערך המקסימלי $f(\sqrt{2},-\sqrt{2})=4+4\sqrt{2}$.