אלגברה לינארית 2 (88113) – בחינת סיום (מועד ב׳)

מרצים: פרופ׳ רון עדין, פרופ׳ בוריס קוניאבסקי.
מתרגלים: עדי בן-צבי, אחיה בר-און, תמר נחשוני.

משך הבחינה: שלוש שעות.
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.
*בבחינה שני פרקים. יש לענות על **2 שאלות** בפרק א׳ ועל **5 שאלות** בפרק ב׳.*
הניקוד הוא אחיד בין השאלות בכל פרק. הניקוד של כל סעיף רשום במפורש.
*אם עניתם על יותר שאלות מהנדרש – נא ציינו בתחילת כל פרק אילו שאלות הן לבדיקה; בהעדר אמירה מפורשת תיבדקנה **השאלות הראשונות**.*
נא לענות על כל שאלה בעמוד נפרד. ניתן לסמן עמודים כ״טיוטה״.
נא להסביר ולנמק בבירור את כל התשובות.

בהצלחה!

פרק א׳: שאלות עם סעיפים

יש לענות על 2 שאלות (מתוך 3). הניקוד על כל שאלה הוא 25 נקודות.

1. תהי נתונה

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & a-2 \\ 1 & 1 & a-2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$$

א. (12 נק׳) הוכיחו: A לכסינה לכל ערך של $a\in\mathbb{R}$.
ב. (13 נק׳) עבור כל ערך של $a\in\mathbb{R}$ מצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D המקיימות $P^{-1}AP=D$.

2.

א. (8 נק׳) נגדיר, עבור $a=(a_1,a_2),\ b=(b_1,b_2)\in\mathbb{R}^2$:

$$\langle a,b\rangle := a_1b_1+2a_1b_2+2a_2b_1+4a_2b_2$$

האם זו מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$? נמקו.
ב. (8 נק׳) יהי V מרחב מכפלה פנימית (מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$), ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. הוכיחו: אם $\langle T(u),v\rangle=0$ לכל $u,v\in V$ אז $T=0$ (העתקת האפס).
ג. (9 נק׳) יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$, ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. הוכיחו: $\langle T(v),v\rangle=0$ לכל $v\in V$ אם ורק אם $T^*=-T$. <u>רמז:</u> קחו $v=v_1+v_2$.

3. תהי A מטריצה ריבועית מרוכבת המקיימת $A^4=-A^2$.
א. (8 נק׳) הוכיחו: ל- A יש לכל היותר 3 ערכים עצמיים שונים.
ב. (8 נק׳) הוכיחו: אם A לכסינה אז $A^3=-A$.
ג. (9 נק׳) נתון ש- A הנ״ל היא מסדר 3×3 אך לא לכסינה. מצאו את כל צורות ז׳ורדן האפשריות עבורה.

פרק ב': שאלות "הוכח או הפרך"

יש לענות על 5 שאלות (מתוך 6). הניקוד על כל שאלה הוא 10 נקודות. נמקו היטב את תשובותיכם!

1. תהי A מטריצה ריבועית, ותהי A^t המטריצה המשוחלפת. אזי כל וקטור עצמי של A הוא גם וקטור עצמי של A^t.

2. אם המטריצה A^2 לכסינה אז גם A לכסינה.

3. אם הפולינום המינימלי של A מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים, אז A לכסינה.

4. אם A היא מטריצה מרוכבת המקיימת $A^3 = 0$ וגם $A^* = -A$, אז המטריצה $U := I + A + (1/2)A^2$ היא אוניטרית.

5. קיימת מטריצה מרוכבת צמודה לעצמה (הרמיטית) עם פולינום אופייני $(x-1)^2(x^2+1)$.

6. יהי V מרחב מכפלה פנימית, ויהיו $u, v, w \in V$. אם u ניצב ל- v ו- v ניצב ל- w, אז u לא יכול להיות ניצב ל- w.