אינטגרל של פונקציה רציונלית

1) $\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx$ כאשר המכנה אי פריק.

איך פותרים?

נעשה השלמה לריבוע:

$$x^2+\cancel{bx}\frac{2bx}{2}+c+\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{4}=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\underbrace{c-\frac{b^2}{4}}$$

חיובי כי הפול׳ x^2+bx+c אי פריק לכן

[illegible]. ולכן ~~[illegible]~~ נרשום:

$$\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,dx=\int \frac{1}{\left(c-\frac{b^2}{4}\right)\left[\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\right)^2+1\right]}\,dx$$

נעשה הצבה:

$$du=\frac{dx}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}} \Leftarrow u=\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\int\frac{du}{u^2+1}=\frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\arctan(u)+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4}}}\right)+C$$

---

2) $\int \frac{A}{x-a}\,dx$

איך פותרים: עושים הצבה

$u=x-a$

$du=dx$

ולכן מקבלים:

$$A\int\frac{du}{u}=A\ln u+C=A\ln(x-a)+C$$

3) $\int\frac{A}{(x-\alpha)^n}$ $(n\in\mathbb{N},\ n>1)$

דוגמה:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+10}$$

$4-4\cdot 10=-36<0$

פולי' לא פריק.

(עושים - השלמה - לריבוע:

$$x^2+2x+1+9=(x+1)^2+9$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2+9}=\frac{1}{9}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{3}\right)^2+1}=$$

$u=\frac{x+1}{3}$ $\quad du=\frac{1}{3}dx \Rightarrow dx=3du$

$$=\frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2+1}=\frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{3}\right)+C$$

2. $\int \frac{A}{x-a}\,dx$

איך פותרים? עושים -ככה-

$u=x-a$
$du=dx$

לפי עדכני:

$$A\int \frac{du}{u}=A\ln u+C=A\ln(x-a)+C$$

3. $\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}$ $\quad (n\in \mathbb{N},\ n>1)$

איך פותרים? (עושים -ככה-:

$u=x-\alpha$ $\quad du=dx$

$$A\int \frac{du}{u^n}=\frac{A}{(1-n)(u)^{n-1}}+C=\frac{A}{(1-n)(x-\alpha)^{n-1}}+C$$

4. $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ $\quad (p^2-4q<0)$

איך פותרים?

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = ?$$

נשלים לריבוע:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

נציב $t = x+\frac{p}{2}$ $\quad a^2 = q - \frac{p^2}{4}$

נגדיר: $dx = dt$ אזי:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} =$$

$$= \int \frac{At - \frac{Ap}{2} + B}{t^2+a^2}\,dt =$$

$$= A\int \frac{t}{t^2+a^2} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left(t^2+a^2\right) + \frac{B-\frac{Ap}{2}}{a}\arctan\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{A}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2B-Ap}{2\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

5) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ $\quad n\in\mathbb{N},\ n>1$

איך פותרים?

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\,dx = A\int \frac{t\,dt}{(t^2+a^2)^n} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} =$$

$$= -\frac{A}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\underbrace{\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}}_{\text{יש נוסחת רקורסיה}}$$

$$\int \frac{x+5}{x^2+2x+10}dx = \int \frac{(x+5)dx}{(x+1)^2+9^2} =$$

$dt = dx$ $\qquad t = x+1$ נסמן נציב

$$= \int \frac{(t+4)\,dt}{t^2+9^2} = \underbrace{\int \frac{t}{t^2+9^2}dt}_{1} + 4\underbrace{\int \frac{dt}{t^2+9^2}}_{2} =$$

$$= \cancel{\frac{\ln(t^2+9^2)}{2}} +$$

(1) $u = t^2+9^2 \qquad du = 2t\,dt \Rightarrow t\,dt = \frac{du}{2}$

$$\int \frac{t}{t^2+9^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln(t^2+9^2) + c =$$

$$= \frac{1}{2}\ln[(x+1)^2+9^2] + c$$

(2) $$4\int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{4}{9}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{3}\right)^2+1} = \frac{4}{3}\int \frac{du}{u^2+1} =$$

$u = \frac{t}{3}$

$3du = dt$

$$= \frac{4}{3}\arctan u + c = \frac{4}{3}\arctan\left(\frac{x+1}{3}\right) + c$$

~~[illegible]~~ שלבים באינטגרציה לפונ' רציונליות ~~[illegible]~~ של פולי'

שלב 1 נתונה מנה $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (P , Q פולינומים)

אם מעלת $P(x)$ גדולה ממעלת של Q אז

(~~[illegible]~~ נחלק את P ב Q ונקבל:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \qquad \deg R < \deg Q$$

ו~~[illegible]~~ קל לחשב את האינטגרל של פולינום $M(x)$

שלב שני:

(5)

נעשה פירוק לשברים חלקיים בצורה מסודרת:

שראינו: ודל:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \left[\frac{A_{11}}{(x-\alpha_1)} + \dots + \frac{A_{1m}}{(x-\alpha_1)^{m_1}}\right] + \dots + \left[\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots\right.$$

$$\left. \dots + \frac{B_{1,n_1}x + C_{1,n_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}}\right] + \dots$$

<u>שלב שלישי:</u> נחשב את האינטגרל.

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \underbrace{\int M(x)\,dx}_{\text{אינטגרל של פולינום}} + \underbrace{\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx}_{\text{כל אחד משברי החד"ח נחשב לפי נוסחאות 1,2,3,4,5 מתחילת השיעור.}}$$

$\int_T$ = אינטגרל של פולינום

<u>דוגמה 1</u> נחשב את:

$$\int \frac{x^4-5x^3+x^2+22x-2}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$$

<u>שלב 1:</u> מעלת המונה גבוהה ממעלת המכנה נעשה חילוק פולינומים ודל:

$$\frac{(x^4-5x^3+20x-16)+(x^2+2x+14)}{(x-1)(x-2)(x-4)} = (x+2) + \frac{x^2+2x+14}{(x-1)(x-2)(x-4)} \quad (*)$$

<u>שלב שני:</u> נעשה פירוק לשברים חלקיים של (*):

$$\frac{x^2+2x+6}{(\quad)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4}$$

$$x^2+2x+6 = A(x-2)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x-1)(x-2)$$

נציב $x=1$: $17 \quad \cancel{1+2+6} = \cancel{9} = A(-1)(-3) = 3A$

$A = \frac{17}{3}$

<u>נציב $x=2$:</u> $22 = \cancel{4+4+6} = B(-2) \Rightarrow B = -10$

<u>נציב $x=4$:</u> $38 = C\cdot 3\cdot 2 \Rightarrow C = \frac{19}{3}$

$$\frac{x^2+2x+6}{(\quad)} = \frac{17}{3(x-1)} - \frac{10}{x-2} + \frac{19}{3(x-4)}$$

$$\int \underline{\qquad} = \int (x+2)\,dx + \int \left[\frac{17}{3(x-1)} - \frac{10}{x-2} + \frac{19}{3(x-4)} \right] dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{17}{3} \ln|x-1| - 10 \ln|x-2| + \frac{19}{3} \ln|x-4| + C$$

2 – NOI3

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}\,dx =$$

$$\frac{1}{(\quad)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$1 = A(x^2+1) + (x-1)(Bx+C) = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C =$$

$$= (A+B)x^2 + (C-B)x + A - C$$

$$C = B \qquad A = -B = -C$$

$$2A = 1 \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2} \qquad B = C = -\frac{1}{2}$$

$$= \int \left[\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \right] dx = \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{1}{2} \arctan x + C$$

3 – NOI3

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2+2}\,dx = \int (x+3)\,dx + \int \frac{3x+1}{x^2+2}\,dx =$$

$$= \cancel{\int} \frac{x^2}{2} + 3x + \underbrace{\frac{3}{2} \int \frac{2x}{x^2+2}}\,dx + \int \frac{1}{x^2+2}\,dx =$$

$$\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|x^2+2| + C$$

$t = x^2 + 2$

$dt = 2x\,dx$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2} \ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

(7)

$$\int \frac{x^4}{x^4-1} = \int \frac{x^4-1+1}{x^4-1}\,dx = \int dx + \int \frac{1}{x^4-1} = x + \int \frac{1}{x^4-1}$$ שלב 1

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^4-1 \\ \hline x^4-1 & 1 \\ \hline +1 & \end{array}$$

שלב שני:

$$x^4-1 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$1 = A(x+1)(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x^2-1)$$

נציב $x=1$:

$$1 = A\cdot 2\cdot 2 = 4A \Rightarrow A = \frac{1}{4}$$

נציב $x=-1$:

$$1 = B(-2)\cdot 2 = -4B \Rightarrow B = -\frac{1}{4}$$

נציב $x=0$:

$$1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - D = \frac{1}{2} - D \Rightarrow D = -\frac{1}{2}$$

נציב $x=2$:

$$1 = \frac{1}{4}\cdot 3\cdot 5 + \cancel{B}\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot 5 + \left(2C - \frac{1}{2}\right)\cdot 3 =$$

$$= \frac{5}{2} + 6C - \frac{3}{2} = 1 + 6C \Rightarrow C = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{x^4-1} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{2(x^2+1)}$$

$$\Downarrow$$

שלב 3

$$\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx = x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= x + \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\arctan x + C$$

דוגמה:

$$\int \frac{x^5}{(x^3+1)(x^3+8)}\,dx = \int \frac{x^3\cdot x^2\,dx}{(x^3+1)(x^3+8)}$$

$$dt = 3x^2\,dx \qquad t = x^3+1 \Rightarrow x^3 = t-1 \text{ נציב}$$

$$\frac{1}{3}dt = x^2\,dx \qquad t+7 = x^3+8$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{(t-1)\,dt}{t(t+7)}$$

$$\frac{t-1}{t(t+7)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+7} \Rightarrow t-1 = A(t+7) + Bt$$

$$\Downarrow$$

$$t-1 = (A+B)t + 7A$$

$$B = \frac{8}{7} \Leftarrow A+B=1 \qquad A = -\frac{1}{7}$$

$$\int\left[-\frac{1}{7t} + \frac{8}{7(t+7)}\right] dt = -\frac{1}{7}\ln|t| + \frac{8}{7}\ln|t+7| + C =$$

$$= -\frac{1}{7}\ln|x^3+1| + \frac{8}{7}\ln|x^3+8| + C$$

:–Nd 13

$$\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}\,dx$$

$$\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{(x-3)^2} + \frac{C}{(x+1)} + \frac{D}{(x+1)^2}$$

$$5x^2+6x+9 = A(x-3)(x+1)^2 + B(x+1)^2 + C(x+1)(x-3) +$$

$$+ D(x-3)^2$$

$$5\cdot 9 + 6\cdot 3 + 9 = B\,16 \qquad :x=3 \text{ ɔ'3)}$$

$$\Downarrow$$

$$B = \frac{9}{2}$$

$:x=-1$

$$8 = 5-6+9 = 16D \Rightarrow D = \frac{1}{2}$$

$x=0$ ɔ'3)

$$9 = A(-3) + \frac{9}{2} + C(-3) + \frac{1}{2}\cdot 9 =$$

$$= -3A - 3C + 9 \Rightarrow A = -C$$

$:x=1$

$$20 = 5+6+9 = A(-2)4 + \frac{9}{2}\cdot 4 - A(2)(-2) + \frac{1}{2}\cdot 4 =$$

$$= -8A + 18 + 4A + 2 = -4A + 20 \Rightarrow A = C = 0$$

$$\int \underline{\quad} = \int \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{(x-3)^2}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \frac{9}{2}\int\frac{du}{u^2} + \frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2}\,dt =$$

$$= -\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{u} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} + C = -\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{(x-3)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^3}\,dx$$

$$1+x^3 = (x+1)(x^2-x+1)$$ פירוק:

$$\frac{1}{1+x^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$x=-1$:
$$1 = 3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$x=0$:
$$1 = \frac{1}{3} + C \Rightarrow C = \frac{2}{3}$$

$x=1$:
$$1 = \frac{1}{3} + \left(B+\frac{2}{3}\right)(2) =$$
$$= \frac{1}{3} + 2B + \frac{4}{3} = \frac{5}{3} + 2B$$
$$\Downarrow$$
$$2B = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$$
$$B = -\frac{1}{3}$$

$$\int \frac{1}{1+x^3}\,dx = \int \frac{1}{3(x+1)}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{3}\ln|x+1|}_{1} - \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx}_{2} = \cancel{\frac{1}{3}}$$

$$\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{(x^2-x+1)} - 2\int \frac{1}{x^2-x+1}\,dx =$$

$u = x^2-x+1$
$du = 2x\,dx$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| - 2\int \frac{1}{x^2-2\cdot\frac{x}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln|x^2-x+1| -$$

$$-\frac{2\cdot 4}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{4}}\right)^2+1} = -\frac{2\cdot 4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\arctan\left(\frac{4x-2}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$1 - \frac{1}{3}\,2$$