אינפי 1 - תרגיל 4

1. נתון: $a_1=5,\ \ a_{n+1}=a_n\cdot\frac{6+a_n}{3+2a_n}$. הוכיחו שהסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

פתרון:
תחילה נוכיח שהסדרה חסומה מלרע ע"י 3 (ולאחר מכן ניעזר בעובדה זו על מנת להוכיח מונוטוניות). באינדוקציה:
בסיס האינדוקציה: $a_1=5\ge 3$
נניח נכונות ל- n: $a_n\ge 3$ ונראה נכונות עבור $n+1$, כלומר: $a_{n+1}\ge 3$.
צריך להוכיח: $a_n\frac{a_n+6}{3+2a_n}\ge 3$ וזה שקול ל- $9+6a_n\le 6a_n+a_n^2$ וזה שקול ל- $9\le a_n^2$ וזה נובע מהנחת האינדוקציה.
כעת נעבור להוכחת מונוטוניות יורדת:
יש להראות $a_{n+1}\le a_n$. מתקיים $a_{n+1}=a_n\frac{a_n+6}{3+2a_n}\le a_n\cdot 1$ שכן מתקיים: $1\ge\frac{6+a_n}{3+2a_n}$.
[כדי לבדוק נכונות של אי השוויון האחרון – תעשו מכנה משותף והיעזרו בכך ש- $a_n\ge 3$].

הסדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע ולכן מתכנסת.
נמצא את הגבול שלה:
$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n=L$ ומאריתמטיקה של גבולות (והשוויון הנתון $a_{n+1}=a_n\cdot\frac{6+a_n}{3+2a_n}$)
נקבל ש- $L=L\cdot\frac{6+L}{3+2\cdot L}$. מכיוון ש- $L\ne 0$ (מדוע? חשבו על החסם התחתון) ניתן לצמצם ולקבל $L=3$.

2. מצאו את הגבול של הסדרה: $a_n=\frac{5^{2n}}{3^{(n+1)^2}}$.

פתרון:
נוכיח תחילה שהסדרה מונוטונית יורדת. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{5^2}{3^{2n+3}}\le 1$. הסדרה חסומה מלרע על ידי אפס, ולכן הסדרה מתכנסת.
נמצא את גבולה: ניעזר ביחס שמצאנו:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{5^2}{3^{2n+3}}\Rightarrow\ a_{n+1}=\frac{5^2}{3^{2n+3}}a_n\ \Rightarrow\ L=0\cdot L\ \Rightarrow\ L=0$$

3. נתונות שתי סדרות $\{a_n\}$ ו $\{b_n\}$, נתון שהסדרה $\{a_n+b_n\}$ חסומה, ונתון $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$. מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

פתרון: $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$ לכן לכל $M>0$ קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $a_n>M$. $\{a_n+b_n\}$ חסומה נגיד על ידי R (כלומר $a_n+b_n<R$). לכל $n>n_0$ $a_n>M$ ולכן $R<M+b_n<a_n+b_n$ ולכן $b_n<R-M$ לכל $n>n_0$. כעת, לכל $M>0$ קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $a_n>R+M$ (בגלל ש- $a_n\to\infty$), ולכן $R+M+b_n<a_n+b_n<R$ ולכן $b_n<R-(R+M)=-M$ כלומר $b_n\to-\infty$, ולכן $\frac{1}{b_n}\to 0$.

$\frac{a_n+b_n}{b_n}=(a_n+b_n)\frac{1}{b_n}\to 0$ מכיון שסדרה חסומה כפול סדרה ששואפת לאפס שואף לאפס.

מתקיים $\frac{a_n+b_n}{b_n}-\frac{b_n}{b_n}=\frac{a_n}{b_n}\to 0-1=-1$ לפי אריתמטיקה של גבולות. ולסיכום

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=-1$

4. תהי $\{a_n\}$ סדרה שאינה חסומה מלעיל. הוכיחו/הפריכו:

a. $\{a_n\}$ שואפת לאינסוף

הפרכה: $a_n=(-1)^n n$ אינה חסומה מלעיל, אך אינה שואפת לאינסוף.

b. ל $\{a_n\}$ יש תת סדרה ששואפת לאינסוף

הוכחה: $\{a_n\}$ אינה חסומה מלעיל, כלומר לכל $M>0$ קיים n_0 כך ש $a_{n_0}>M$. ניקח $M_1>\max\{a_1,...,a_{n_0}\}$ ולכן קיים $n_1>n_0$ כך ש $a_{n_1}>M_1>a_{n_0}$ נמשיך בתהליך הזה עד שנקבל תת סדרה a_{n_k} מונוטונית עולה ולא חסומה ולכן מתכנסת במובן הרחב לאינסוף.

5. תהי $\{a_n\}$ סדרה חסומה. הוכיחו כי ל- $\{a_n\}$ יש בהכרח תת סדרה מונוטונית.

הוכחה:

לפי משפט יש ל $\{a_n\}$ תת סדרה מתכנסת. לכן מספיק להוכיח שלכל סדרה מתכנסת יש תת סדרה מונוטונית. נניח $b_n \to L$ נוכיח שקיימת לה תת סדרה מונוטונית. קיימים אינסוף איברים מתוך b_n המקיימים $b_n > L$ או שקיימים אינסוף איברים המקיימים $L < b_n$ או שקיימים אינסוף איברים המקיימים $b_n = L$ (זה נכון לכל מספר, לאו דווקא לגבול הסדרה).

אם קיימים אינסוף איברים המקיימים $b_n = L$, נבחר אותם להיות תת סדרה והיא כמובן מונוטונית (הסדרה הקבועה הינה מונוטונית).

נניח שקיימים אינסוף איברים הגדולים מ L, נבחר אחד מהם ונסמן אותו ב b_{n_1}. עבור $\varepsilon = b_{n_1} - L > 0$ קיים מקום בסדרה כך שהחל ממנו והלאה כל האיברים מקיימים $|b_n - L| < \varepsilon$ לכן בפרט קיים איבר כזה מבין אינסוף האיברים הגדולים מ L הנמצאים בסדרה אחרי b_{n_1}, נסמן איבר זה ב b_{n_2}.

נסביר מדוע יש מספר אינסופי של איברים בקטע $\left(L, b_{n_1}\right)$:

מהגדרת הגבול נובע שמחוץ לכל סביבת אפסילון של L יכולים להיות רק מספר סופי של איברים. ולכן, אם נבחר $\varepsilon = b_{n_1} - L$ אזי מחוץ לסביבה $\left(L-\varepsilon, b_{n_1}\right)$ יש רק מספר סופי של איברים. לכן בקרן $\left[b_{n_1}, \infty\right)$ יש רק מספר סופי של איברים. מצד שני בקרן $\left(L, \infty\right)$ יש אינסוף איברים, על פי ההנחה. ולכן יש אינסוף איברים בקטע $\left(L, b_{n_1}\right)$. לכן, בפרט יש איבר בקטע זה שהאינדקס שלו גדול מ- n_1.

מתקיים $\left|b_{n_2} - L\right| < \varepsilon$ ולכן $b_{n_2} - L < \varepsilon = b_{n_1} - L$ ולכן $b_{n_2} < b_{n_1}$. נגדיר $\varepsilon = b_{n_2} - L > 0$ וכך הלאה נגדיר את תת הסדרה $\left\{b_{n_k}\right\}$ שהיא מונוטונית לפי הבנייה.

אם יש אינסוף איברים הקטנים מ L ניתן לבנות באופן דומה תת סדרה מונוטונית עולה.

הוכחה אחרת (של אדווה – סטודנטית משנה שעברה):

תהי $\{a_n\}$ סדרה. איבר a_k נקרא דומיננטי אם מתקיים $\forall n > k : a_k \ge a_n$. במילים, איבר הינו דומיננטי אם הוא גדול שווה לכל האיברים הבאים אחריו בסדרה.

אם לסדרה יש אינסוף איברים דומיננטים, אז קל לראות שהם מהווים תת סדרה מונוטונית יורדת (הרי כל אחד קטן שווה לקודמיו – כי הם דומיננטיים).

נניח שלסדרה אין אינסוף איברים דומיננטים, ונבחר n_0 (מקום בסדרה) כך שלאחריו אין איברים דומיננטים כלל. כלומר, לכל $n > n_0$ האיבר a_n אינו דומיננטי. נבחר $n_1 > n_0$ כלשהו,

לכן קיים איזה $n_2 > n_1$ כך ש $a_{n_2} > a_{n_1}$ (הרי a_{n_1} אינו דומיננטי). בפרט גם $n_2 > n_0$ לכן a_{n_2} דומיננטי ולכן קיים $n_3 > n_2$ כך ש $a_{n_3} > a_{n_2}$ וכך הלאה נבנה תת סדרה מונוטונית עולה.

6. תהי הסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$, ונתון $a_1 = c > 0$

a. עבור אילו ערכי c הסדרה מונוטונית עולה? יורדת?

פתרון:

רוצים לראות מתי $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ גדול מאחד או קטן מאחד. $\frac{1}{\sqrt{a_n}} = \frac{\sqrt{a_n}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. לכן, אם $a_n < 1$ אזי $\sqrt{a_n} < 1$ ולכן $\frac{1}{\sqrt{a_n}} > 1$ ולכן $a_{n+1} > a_n$. לכן הסדרה תהא מונוטונית עולה אם כל האיברים שלה יהיו קטנים מאחד. אבל קל להראות באינדוקציה שאם $c < 1$ אזי כל איברי הסדרה קטנים מאחד: נניח $a_n < 1$ לכן $a_{n+1} = \sqrt{a_n} < 1$.

באופן דומה, ניתן להראות שעבור $c \geq 1$ הסדרה מונוטונית יורדת.

b. עבור אילו ערכי c הסדרה מתכנסת?

פתרון:

הסדרה יורדת וחסומה על ידי 1 או עולה וחסומה על ידי 1 ולכן מתכנסת תמיד

c. מה גבול הסדרה עבור ערכי c מהסעיף הקודם?

פתרון:

$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$. נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ לכן לפי שאלה קודמת ביחד מקבלים $L = \sqrt{L}$ לכן $L^2 - L = 0$ לכן $L = 0$ או $L = 1$. אם $c > 1$ אז כל איברי הסדרה גדולים מאחד ולכן גבול הסדרה גדול שווה 1 ובפרט אינו אפס. אם $c \leq 1$ אז הסדרה מונוטונית עולה ולכן כל איברי הסדרה גדולים שווים ל c ולכן גבול הסדרה גדול שווה ל c אבל $0 < c$ ולכן גבול הסדרה שוב לא יכול להיות אפס.

תשובה: לכן גבול הסדרה הינו 1

7. תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}$ ונתון $a_1>0, c>0$

a. עבור אילו ערכים של a_1 הסדרה מונוטונית עולה? יורדת? (רמז: נניח x מקיים $x=\sqrt{c+x}$, מה קורה כאשר $a_n<x$?)

פתרון:

נבדוק מתי הסדרה מונוטונית, $a_{n+1}-a_n=\sqrt{c+a_n}-a_n$. נשווה לאפס, $\sqrt{c+a_n}-a_n=0$ אם"ם $a_n{}^2=c+a_n$, פתרונות המשוואה הזו הם $\frac{1\pm\sqrt{1+4c}}{2}$. קל לראות שתמיד $a_n\geq 0$ לכן כאשר $x=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}>a_n>0$ מתקיים $a_n{}^2-a_n-c=0$ כלומר $a_n{}^2<c+a_n$ כלומר $a_n<a_{n+1}$. שימו לב שבהינתן n ספציפי עבור a_n נמצא בטווח הנ"ל, מתקיים $a_n<a_{n+1}$. כלומר, לא ניתן להסיק מכך באופן מיידי שהסדרה עולה. כן ניתן להסיק מיידית שאם a_1 בטווח הנ"ל, אזי $a_1<a_2$. ניתן להוכיח באינדוקציה שאם $0<a_1<\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ אזי הסדרה מונוטונית עולה. באופן דומה מוכיחים שאם $a_n>\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ הסדרה מונוטונית יורדת.

תשובה: לכן הסדרה מונוטונית עולה אם $0<a_1<x$ ומונוטונית יורדת אם $x<a_1$

b. עבור הערכים שמצאת בסעיף הקודם, האם הסדרה מתכנסת?

פתרון:

ניתן להראות באינדוקציה שהסדרה חסומה מלעיל אם היא מונוטונית עולה, והיא חסומה מלרע אם היא מונוטונית יורדת.

הראנו שאיברי הסדרה יורדים וחסומים מלמטה ע"י x או שהם עולים וחסומים למעלה ע"י x כך או כך הסדרה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת תמיד.

c. מה גבול הסדרה כאשר היא מתכנסת? האם יכולת לענות על סעיף זה לפני הסעיפים הקודמים?

פתרון:

אם הסדרה מתכנסת נסמן $\lim_{n\to\infty}a_n=L$. לפי שאלה קודמת, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{c+a_n}=\sqrt{c+L}$ אבל $L=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{c+a_n}=\sqrt{c+L}$. לכן $L=\frac{1\pm\sqrt{1+4c}}{2}$ אבל מכיוון שאיברי הסדרה אי שליליים, לא יתכן שהגבול שלילי ולכן הגבול הינו $L=x=\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ (וזה מאד הגיוני בהתחשב בסעיף הראשון – הסדרה עלתה לכיוון x או ירדה לכיוונו)

- האם יכולנו לענות על סעיף זה קודם? כן יכולנו לחשב את הגבול, אך לא יכולנו לקבוע שהוא אכן הגבול, מבלי קודם להוכיח שהסדרה מתכנסת.

8. תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ ונתון $a_1>0$. הוכיחו ש- $\{a_n\}$ אינה חסומה. (רמז: הראו שהיא מונוטונית קודם כל).

פתרון: קל להראות באינדוקציה ש $a_n\ge 0$ לכל n. ולכן $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n}\ge 0$ כלומר הסדרה מונוטונית עולה. נניח ש $\{a_n\}$ הייתה חסומה, לכן היא הייתה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת לגבול L כלשהוא. לכן $L=\lim a_{n+1}=\lim(a_n+\frac{1}{a_n})=L+\frac{1}{L}$ ולכן $L=L+\frac{1}{L}$ ולכן $\frac{1}{L}=0$. אבל אין מספר ממשי שמקיים את המשוואה הזו, וזו סתירה לכך שהסדרה מתכנסת, ולכן היא אינה חסומה.