פתרון תרגיל בית 6 – טופולוגיה

<u>שאלה 1</u>

שאלה זו מציגה את הוכחתו הטופולוגית של פרופ' פורסטנברג לקיומם של אינסוף מספרים ראשוניים. **מותר ורצוי להשתמש במה שהוכחנו בתרגול לגבי טופולוגיה זו.**

כזכור, סדרה חשבונית דו צדדית היא קבוצה $S=a+d\mathbb{Z}=\{a+dk \mid k\in\mathbb{Z}\}$ $(a\in\mathbb{Z},\quad d\in\mathbb{N})$. נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה הבאה: $O\in\tau$ אם"ם לכל $x\in O$ יש סדרה חשבונית דו צדדית $S=x+d\mathbb{Z}$ כך ש- $x\in S\subseteq O$.

1. הוכיחו כי $\bigcup p\mathbb{Z}=\mathbb{Z}-\{1,-1\}$ (האיחוד הוא על כל המספרים הראשוניים).
2. הוכיחו כי $\mathbb{Z}-\{1,-1\}$ אינה סגורה.
3. הסיקו כי ישנם אינסוף מספרים ראשוניים.

<u>פתרון</u>

1. נראה הכלה דו כיוונית. יהי $y\in\bigcup p\mathbb{Z}$, אזי y הוא כפולה שלמה של ראשוני ובפרט $y\notin\{1,-1\}$. בכיוון ההפוך: יהי $m\in\mathbb{Z}-\{1,-1\}$ אם m ראשוני אזי $m=m\cdot 1\in m\mathbb{Z}\subseteq\bigcup p\mathbb{Z}$. אם m פריק אזי קיים ראשוני q המחלק את m ולכן $m\in q\mathbb{Z}\subseteq\bigcup p\mathbb{Z}$.

2. נראה ש $\{1,-1\}$ אינה פתוחה ולכן $\mathbb{Z}-\{1,-1\}$ אינה סגורה. אמנם, $\{1,-1\}$ סופית ולכן לא יכולה להכיל סדרה חשבונית דו צדדית שהיא אינסופית.

3. נניח בשלילה כי מס' הראשוניים הוא סופי. הראינו שכל סדרה חשבונית דו צדדית היא סגורה וכמו כן איחוד סופי של קב' סגורות היא סגורה ומכאן $\bigcup p\mathbb{Z}$ סגורה. עפ"י סעיף (1) נקבל ש- $\mathbb{Z}-\{1,-1\}$ סגורה בסתירה לסעיף (2).

מש"ל

שאלה 2

יהיה X מ"ט. $A\subseteq X$ תת מרחב, אזי $S\subseteq A$ סגורה ב- A $\Leftrightarrow$ קיימת $Q\subseteq X$ סגורה ב- X כך ש- $S=Q\bigcap A$.

פתרון

$\Rightarrow$ קיימת $Q\subseteq X$ סגורה ב- X כך ש- $S=Q\bigcap A$, צריך להוכיח שְ- S סגורה בְּ- A. נשים לב שמתקיים: $A\setminus S=A\setminus(Q\bigcap A)=A\bigcap(X\setminus Q)$. $(X\setminus Q)$ הינה קבוצה פתוחה ב- X ולכן לפי הגדרת תת מרחב טופולוגי $A\bigcap(X\setminus Q)$ פתוחה ב- A.
מכאן נובע שְ- $A\setminus S$ פתוחה ב- A ולכן S סגורה ב- A.
$\Leftarrow$ נתון כי $S\subseteq A$ סגורה ב- A, נבנה $Q\subseteq X$ סגורה ב- X כך ש- $S=Q\bigcap A$.

היות וְ- S סגורה, המשלים שלה בְּ- A פתוח, ולכן קיימת $V\subseteq X$ פתוחה ב- X כך שְ- $A\setminus S=V\bigcap A$. מכאן, $A\setminus(A\setminus S)=A\setminus(V\bigcap A)$ $\Leftarrow$ $S=A\setminus V$. מצד שני, נשים לב כי $A\setminus V=A\bigcap(X\setminus V)$. לכן, בסה"כ, $S=A\bigcap(X\setminus V)$. נבחר $Q=X\setminus V$ ונקבל את הדרוש.

מש"ל

שאלה 3

הוכיחו:

א. כל פונקציה ממרחב טופולוגי דיסקרטי לכל מרחב טופולוגי אחר – הינה רציפה .
ב. כל פונקציה ממרחב טופולוגי כלשהו למרחב הטופולוגי הטריוויאלי - הינה רציפה.
ג. תהי $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ רציפה. נניח כי $\tau_3\subseteq\tau_2$ וגם $\tau_1\subseteq\tau_4$. הוכיחו כי $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_3)$ וגם $f:(X,\tau_4)\to(Y,\tau_2)$ רציפות.

פתרון

א. תהי $f:(X,\tau_{disc})\to(Y,\tau)$ פונקציה ממרחב טופולוגי דיסקרטי למרחב טופולוגי כלשהו. במ"ט דיסקרטי כל קבוצה היא פתוחה, ולכן $\forall U\subseteq Y$ פתוחה, גם $f^{-1}(U)\subseteq X$ פתוחה. ומהגדרת הרציפות נובע כי f רציפה.

ב. תהי $f:(X,\tau)\to(Y,\tau_{trivial})$. נוכיח שהיא רציפה. כזכור, בטופולוגיה הטריוויאלית יש רק שתי קבוצות פתוחות: הקבוצה הריקה והמרחב עצמו. לכן עלינו לבדוק רק שתי תמונות הפוכות.

$f^{-1}(Y)=X$, $f^{-1}(\varnothing)=\varnothing$ ואלה הן שתי קבוצות פתוחות במרחב המקור.
לכן (לפי ההגדרה) f רציפה.

ג. $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ רציפה. לכן לכל $U\in\tau_2$ מתקיים $f^{-1}(U)\in\tau_1$. אבל, $\tau_3\subseteq\tau_2$, ולכן לכל $U\in\tau_3$ מתקיים $f^{-1}(U)\in\tau_1$. מהגדרת הרציפות נובע שֶ- $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_3)$ רציפה.
כמו כן, אם $f:(X,\tau_1)\to(Y,\tau_2)$ רציפה, לכל $U\in\tau_2$ מתקיים $f^{-1}(U)\in\tau_4$, היות וְ- $\tau_1\subseteq\tau_4$. לכן $f:(X,\tau_4)\to(Y,\tau_2)$ רציפה גם כן.

מש"ל

<u>שאלה 4</u>
תהי $f:X\to Y$ פונקציה בין שני מרחבים טופולוגיים. ניתן לראות את $f(X)$ כתת מרחב טופולוגי של Y.

א. הוכיחו שאם f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- Y אזי היא פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל-$f(X)$.
ב. הראו ע"י שתי דוגמאות נגדיות שמהעובדה ש- f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל-$f(X)$ לא נובע ש- f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- Y.

<u>פתרון</u>

א) תהי $f:X\to Y$.
1) נניח ש $f:X\to Y$ פתוחה ונוכיח ש $f:X\to f(X)$ פתוחה. תהי U פתוחה ב- X. מההנחה מתקיים $f(U)$ פתוחה ב Y. מתקיים $f(U)\subseteq f(X)$ ולכן $f(U)=f(U)\cap f(X)$. מכיון ש $f(U)$ פתוחה ב Y וכן $f(U)=f(U)\cap f(X)$ נקבל עפ"י הגדרת טופולוגית תת מרחב ש $f(U)$ פתוחה ב $f(X)$.
2) ההוכחה של המקרה שבן נתון ש $f:X\to Y$ סגורה וצ"ל ש $f:X\to f(X)$ סגורה, דומה מאד להוכחה של סעיף א. רק בשלב הסופי יש להיעזר בתרגיל בית שמדבר על אפיון קבוצה סגורה בטופולוגית תת מרחב.

ב) 1) דוגמא נגדית לעובדה שמכך ש- $f:X\to f(X)$ פתוחה לא נובע ש- $f:X\to Y$ פתוחה .
יהיו $Y=\mathbb{R}$, $X=\mathbb{Z}$ ו $f=i$ העתקת ההכלה. כלומר $f(x)=x$. ברור ש $f(X)=\mathbb{Z}$ והפונקציה $f:X\to f(X)$ פתוחה שכן היא למעשה פונקצית הזהות מ $\mathbb{Z}$ על $\mathbb{Z}$. אבל, $i:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ אינה פתוחה כי למשל $\mathbb{Z}$ פתוחה ב $\mathbb{Z}$ אבל $i(\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$ אינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.
2) דוגמא נגדית שניה: $f:X\to f(X)$ סגורה ו- $f:X\to Y$ אינה סגורה.

יהיו $Y=\mathbb{R}$ $X=\mathbb{Q},$ ו- $f=i$ העתקת ההכלה כלומר $f(x)=x$. ברור ש $f(X)=\mathbb{Q}$ והפונקציה $f:X\to f(X)$ סגורה שכן היא למעשה פונקצית הזהות מ $\mathbb{Q}$ על $\mathbb{Q}$. מצד שני $i:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ אינה סגורה כי למשל $\mathbb{Q}$ סגורה ב $\mathbb{Q}$ אבל $i(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ אינה סגורה ב $\mathbb{R}$.

<u>הערה</u>: דוגמא נגדית 2 היתה יכולה לשמש גם כדוגמא נגדית לסעיף 1) שכן הפונקציה $i:\mathbb{Q}\to i(\mathbb{Q})$ היא גם פתוחה והפונקציה $i:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ אינה פתוחה כי $\mathbb{Q}$ פתוחה ב $\mathbb{Q}$ אבל $i(\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$ אינה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

מש"ל

<u>שאלה 5</u>

יהיו $m,c\in\mathbb{R}$ שני מספרים נתונים. נגדיר תת מרחב של $\mathbb{R}^2$:
$X=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=mx+c\right\}$. הוכיחו ש- X הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}$.

<u>פתרון</u>

תהי $p_1:X\to\mathbb{R}$ פונקציית ההטלה על הרכיב הראשון. היא הפיכה שכן $f:\mathbb{R}\to X$ המוגדרת ע"י $f(x)=(x,mx+c)$ היא ההופכית שלה. אכן,

$f(p_1(x,mx+c))=f(x)=mx+c$, $p_1(f(x))=p_1(x,mx+x)=x$. $p_1:X\to\mathbb{R}$ רציפה שכן היא מתקבלת מצמצום התחום ל X של פונקציית ההטלה הרציפה (הוכחנו בעבר) $p_1:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. נוכיח ש- $f=p_1^{-1}$ רציפה ונסיק ש- p_1 הומיאומורפיזם.

נראה רציפות של f בנקודה שרירותית $r\in\mathbb{R}$. יהי $\varepsilon>0$ נבחר

$\delta=\begin{cases}\min\left\{\frac{\varepsilon}{|m|},\varepsilon\right\} & m\neq 0\\ \varepsilon & m=0\end{cases}$. אזי $\delta>0$ ולכל $x\in\mathbb{R}$ המקיים $|x-r|<\delta$ מתקיים

$$\begin{aligned}&d_{\max}(f(x),f(r))=d_{\max}\left((x,mx+c),(r,mr+c)\right)=\max\left\{|x-r|,|m||x-r|\right\}\\&<\max\left\{|m|\delta,\delta\right\}\le\varepsilon\end{aligned}$$

מש"ל

שאלה 6

יהי $(X,\|\ \|)$ מרחב נורמי, $a\in X, c\in\mathbb{R}$.הוכיחו שהפונקציות הבאות רציפות:

1. העתקת הנורמה- $f:(X,\|\ \|)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=\|x\|$ (שני המרחבים הם מרחבים מטריים).
2. הזזה- $g:(X,\|\ \|)\to(X,\|\ \|)$ המוגדרת ע"י $g(x)=x+a$.
3. כפל בסקלר- $h:(X,\|\ \|)\to(X,\|\ \|)$ המוגדרת ע"י $h(x)=cx$.
4. הסיקו כי כל כדור פתוח $B(a,\varepsilon)$ $(\varepsilon>0,\ a\in X)$ הומיאומורפי ל- $B(0,1)$.

פתרון

1. נראה רציפות בנקודה שרירותית x . יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\varepsilon$ ונקבל שלכל $y\in X$ המקיימת $\|x-y\|<\delta$ מתקיים
$|f(x)-f(y)|=\left|\|x\|-\|y\|\right|\le\|x-y\|<\delta=\varepsilon$. נוכיח את אי השוויון
$\left|\|x\|-\|y\|\right|\le\|x-y\|$ עפ"י אי שוויון המשולש של הנורמה
$\|x\|=\|x-y+y\|\le\|x-y\|+\|y\|\to\|x-y\|\ge\|x\|-\|y\|$ ניתן להוכיח בצורה דומה
$\|x-y\|\ge\|y\|-\|x\|$ ולכן בסה"כ $\left|\|x\|-\|y\|\right|\le\|x-y\|$.

2. נראה רציפות בנקודה שרירותית x . יהי $\varepsilon>0$. נבחר $\delta=\varepsilon$ ונקבל שלכל $y\in X$ המקיימת $\|x-y\|<\delta$ מתקיים
$\|g(x)-g(y)\|=\|x+a-(y+a)\|=\|x-y\|<\delta=\varepsilon$.
3. אם $c=0$ נקבל העתקה קבועה . (העתקת האפס) והיא רציפה . עבור $c\neq 0$ נוכיח רציפות בנקודה שרירותית x . עבור $\varepsilon>0$ ניתן לקחת $\delta=\dfrac{\varepsilon}{|c|}$ ולקבל הדרוש.

4. תהי $h:B(a,\varepsilon)\to B(0,1)$ העתקה המוגדרת ע"י $h(z)=\dfrac{1}{\varepsilon}(z-a)$ (קל לבדוק שאכן התמונה מוכלת בכדור היחידה) זו העתקה רציפה עפ"י סעיפים 2,3 (הזזה בווקטור $-a$ וכפל בסקלר $\dfrac{1}{\varepsilon}$) ו-
$h^{-1}:B(0,1)\to B(a,\varepsilon)$ ההופכית של h היא הפונקציה $h^{-1}(z)=\varepsilon z+a$ שמוגדרת אף היא באמצעות כפל בסקלר והזזה ולכן רציפה אף היא עפ"י הסעיפים הקודמים. מכאן ש $B(0,1)$ ו- $B(a,\varepsilon)$ הומיאומורפיים.

מש"ל