<u>**שיעור 8**</u>

מטריצות

הגדרות וסימונים

הקבוצה $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1n} \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ . & & & & . \\ a_{m1} & & & & a_{mn} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{F}, \left(i=1,...,m : j=1,...,n \right) \right\} =: \mathbb{F}^{m\times n}$ היא אוסף

המטריצות $m \times n$ מעל השדה $\mathbb{F}$. מסומן גם: $M_{m\times n}\left(\mathbb{F}\right)$. הביטוי $m \times n$ נקרא סדר המטריצה.

כאשר m מייצג את מספר השורות ו n מייצג את מספר העמודות.

מטריצות מסדר $1\times n$ נקרות וקטורי שורה.

מטריצות מסדר $m\times 1$ נקראות וקטורי עמודה.

דוגמאות

המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ היא מסדר 2×2. המטריצה $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 11 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ היא מסדר 3×2.

המטריצה $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ היא מסדר 3×1 ונקראת גם וקטור עמודה.

המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ היא מסדר 1×3 ונקראת גם וקטור שורה.

שוויון מטריצות

מטריצות $A=\left(a_{ij}\right)\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו $B=\left(b_{ij}\right)\in\mathbb{F}^{k\times l}$ הן שוות אם:

א. $k=m$ וגם $l=n$. ז"א המטריצות מאותו הסדר.

ב. לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$ מתקיים $a_{ij}=b_{ij}$.

במקרה זה כותבים $A=B$.

דוגמאות

המטריצות $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ לא שוות מכיוון שהן לא מאותו סדר.

המטריצות $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ לא שוות מכיוון ש $a_{12}\neq b_{12}$.

המטריצות $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ שוות ובמקרה זה ניתן לרשום $A=B$.

חיבור מטריצות

ניתן להגדיר חיבור של שתי מטריצות A,B רק אם המטריצות מאותו הסדר.

החיבור של שתי מטריצות $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מתבצע ע"י חיבור האיברים במקומות החופפים.

$C=A+B$ פירושו $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

דוגמאות

1. לא ניתן לחבר את המטריצות $A=\begin{pmatrix}1&3&5&2\\0&-1&2&3\\4&6&7&9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&4&5\\6&-1&4\\11&6&7\\-5&5&9\end{pmatrix}$ מכיוון שהן לא מאותו סדר. המטריצה A מסדר 3×4 והמטריצה B מסדר 4×3.
2. $A+B=\begin{pmatrix}0&1\\4&8\end{pmatrix} \Leftarrow A=\begin{pmatrix}1&-2\\2&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&3\\2&5\end{pmatrix}$.

כפל סקלר

כפל סקלר $\alpha\in\mathbb{F}$ במטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מוגדר ע"י כפל כל אחד מרכיבי המטריצה A ב α:
$C=\alpha A$ פירושו: $c_{ij}=\alpha a_{ij}$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).

דוגמא

$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\-3&0&4\end{pmatrix} \Leftarrow 3A=\begin{pmatrix}6&3&9\\-9&0&12\end{pmatrix}$. במקרה זה $\alpha=3$.

מטריצת האפס

מטריצת האפס $0\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מוגדרת ע"י $o_{ij}=0$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).

המטריצה הנגדית

המטריצה הנגדית $C=-A$ של מטריצה A מוגדרת על ידי $c_{ij}=-a_{ij}$
(לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).

דוגמא

המטריצה הנגדית של $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}$ היא $-A=\begin{pmatrix}-2&-3\\-1&-4\end{pmatrix}$.

תכונות

עבור מטריצות $A,B,C\in\mathbb{F}^{m\times n}$ וסקלרים $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ מתקיים:

א. $A+B=B+A$. ב. $A+(B+C)=(A+B)+C$. ג. $A+0=0+A=A$.
ד. $A+(-A)=(-A)+A=0$. ה. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$. ו. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.
ז. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$. ח. $0A=0$ ו $1A=A$.

הוכחה

א.

$C=A+B$ פירושו $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).

$D=B+A$ פירושו $d_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).

מתכונת החילוף בשדה נקבל ש $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).

סה"כ קיבלנו ש $d_{ij}=c_{ij}$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$), ולכן $C=D$.

ב.

$D=(A+B)+C$ פירושו $d_{ij}=(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).

$E=A+(B+C)$ פירושו $e_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).

מתכונת האסוציאטיביות בשדה נקבל ש $(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}=a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,n$).

סה"כ קיבלנו ש $d_{ij}=e_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$), ולכן $D=E$.

ג.

מסעיף א נקבל $A+0=0+A$.

מטריצת האפס $0\in\mathbb{F}^{m\times n}$ מוגדרת ע"י $o_{ij}=0$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

$C=A+0$ פירושו $c_{ij}=a_{ij}+0_{ij}=a_{ij}+0=a_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$), ולכן $C=A$.

ד.

מסעיף א נקבל ש $A+(-A)=(-A)+A$.

$C=A+(-A)$ פירושו $c_{ij}=a_{ij}+(-a_{ij})=0$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$), ולכן $C=0$.

ה.

$C=A+B$ פירושו $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

$D=\alpha(A+B)=\alpha C$ פירושו $d_{ij}=\alpha c_{ij}=\alpha(a_{ij}+b_{ij})=\alpha a_{ij}+\alpha b_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

$E=\alpha A$ פירושו: $e_{ij}=\alpha a_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

$F=\alpha B$ פירושו: $f_{ij}=\alpha b_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

סה"כ קיבלנו ש $D=E+F$.

ו.

$C=(\alpha+\beta)A$ פירושו: $c_{ij}=(\alpha+\beta)a_{ij}=\alpha a_{ij}+\beta a_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

$D=\alpha A$ פירושו: $d_{ij}=\alpha a_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

$E=\beta A$ פירושו: $e_{ij}=\beta a_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

ולכן $C=D+E$.

ז.

$C=(\alpha\beta)A$ פירושו: $c_{ij}=(\alpha\beta)a_{ij}=\alpha(\beta a_{ij})$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

$D=\beta A$ פירושו: $d_{ij}=\beta a_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

$E=\alpha(\beta A)=\alpha D$ פירושו: $e_{ij}=\alpha d_{ij}=\alpha(\beta a_{ij})$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$).

סה"כ קיבלנו ש $C=E$.

ח.

$C=0A$ פירושו: $c_{ij}=0\cdot a_{ij}=0$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$), ולכן $C=0$.

$C=1A$ פירושו: $c_{ij}=1\cdot a_{ij}=a_{ij}$ (לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,n$), ולכן $C=A$.

<u>כפל מטריצות</u>

הכפל $C=AB$ של שתי מטריצות מוגדר רק כאשר מספר העמודות ב A שווה למספר השורות ב B.

הכפל $C=AB$ של שתי מטריצות $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו $B\in\mathbb{F}^{n\times k}$ מתבצע בצורה הבאה:

$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$ לכל $i=1,...,m$ ו $j=1,...,k$. התוצאה היא המטריצה $C=(c_{ij})\in\mathbb{F}^{m\times k}$.

<u>דוגמאות</u>

1.

$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}$ נשים לב תחילה שהכפל AB מוגדר מכיוון שמספר העמודות ב A שווה למספר השורות ב B. נחשב את הכפל $C=AB$.

$$c_{11}=\sum_{k=1}^{3}a_{1k}b_{k1}=1\cdot1+(-1)\cdot2+(-2)\cdot3=-7$$

$$c_{12}=\sum_{k=1}^{3}a_{1k}b_{k2}=1\cdot0+(-1)\cdot(-1)+(-2)\cdot1=-1$$

$$c_{13}=\sum_{k=1}^{3}a_{1k}b_{k3}=1\cdot0+(-1)\cdot2+(-2)\cdot1=-4$$

$$c_{21}=\sum_{k=1}^{3}a_{2k}b_{k1}=2\cdot1+0\cdot2+3\cdot3=11$$

$$c_{22}=\sum_{k=1}^{3}a_{2k}b_{k2}=2\cdot0+0\cdot(-1)+3\cdot1=3$$

$$c_{23}=\sum_{k=1}^{3}a_{2k}b_{k3}=2\cdot0+0\cdot2+3\cdot1=3$$

$$\Leftarrow C=\begin{pmatrix}-7 & -1 & -4\\ 11 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

נשים לב שהכפל BA לא מוגדר וזאת מכיוון שמספר העמודות ב B שונה ממספר השורות ב A.

.2

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ נשים לב שהכפל AB מוגדר וכן הכפל BA.

נסמן $C=AB$ ו $D=BA$. נראה ש $C\neq D$.

$$c_{11}=\sum_{k=1}^{2}a_{1k}b_{k1}=1\cdot2+(-1)\cdot(-1)=3$$

$$d_{11}=\sum_{k=1}^{2}b_{1k}a_{k1}=2\cdot1+1\cdot2=4$$

$$\Leftarrow c_{11}\neq d_{11}\Leftarrow C\neq D.$$

<u>תכונות</u>

אם המכפלה באחד האגפים מוגדרת, אז גם המכפלה באגף השני מוגדרת, ותוצאתן שווה:

א. $A(BC)=(AB)C$.

ב. $A(B+C)=AB+AC$.

ג. $(B+C)A=BA+CA$.

ד. כאשר $\alpha\in F$ מתקיים $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$.

ה. $A0=0$ וכן $0A=0$.

<u>כפל שורה - שורה וכפל עמודה – עמודה</u>

תהי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$.

יהא $1\le i\le m$ השורה ה i של A (מסומנת: $R_i(A)$) היא הווקטור $v\in\mathbb{F}^{1\times n}$ המקיים $v_j=a_{ij}$ לכל $j=1,\dots,n$.

יהא $1\le j\le n$ העמודה ה j של A (מסומנת: $C_j(A)$) היא הווקטור $v\in\mathbb{F}^{m\times 1}$ המקיים $v_i=a_{ij}$ לכל $i=1,\dots,m$.

<u>דוגמא</u>

תהי $A=\begin{pmatrix}12 & 3\\ -1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ אז $R_2(A)=\begin{pmatrix}-1 & 1\end{pmatrix}$ ו $C_2(A)=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$.

סימון

עבור $i=1,\dots,n$ נסמן ב e_i את הווקטור ב $\mathbb{F}^n$ שכולו אפסים פרט למקום ה i, שבו כתוב 1.

דוגמא

$$e_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

משפט

יהיו נתונות מטריצות $A\in\mathbb{F}^{m\times n}, B\in\mathbb{F}^{n\times k}$, ותהא $C=AB\in\mathbb{F}^{m\times k}$. אז מתקיים:

1. $AB=\begin{pmatrix}R_1(A)B\\ .\\ .\\ .\\ R_m(A)B\end{pmatrix}$.
2. $AB=\begin{pmatrix}AC_1(B) & AC_2(B) & . & . & . & AC_k(B)\end{pmatrix}$.

הוכחה 1

מספיק להוכיח ש $R_i(C)=R_i(A)B$.

דוגמא

$B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\\ 4 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. $C=AB \Leftarrow C=\begin{pmatrix}1 & 4 & 9\\ 9 & 0 & 3\\ 11 & 8 & 21\\ 5 & -4 & -7\end{pmatrix}$.

$R_3(A)=\begin{pmatrix}4 & 5\end{pmatrix}$.

$R_3(A)B=\begin{pmatrix}4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & 8 & 21\end{pmatrix}=C_3(C)$.

המשך הוכחה

אם $C=AB$ אז $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \Leftarrow R_i(C)=\left(\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{t1} \quad \sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{t2} \quad . \quad . \quad . \quad \sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tk}\right)$.

$R_i(A)=\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & . & . & . & a_{in}\end{pmatrix} \Leftarrow D=R_i(A)B \Leftarrow d_j=\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tj}$.

סה"כ קיבלנו שוויון.

באותו אופן ניתן להוכיח את סעיף 2.

המטריצה המשוחלפת

תהיי $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$. המטריצה המשוחלפת $A^t\in\mathbb{F}^{n\times m}$ מוגדרת ע"י $b_{ij}=a_{ji}$ (לכל $i=1,\dots,m$ ו $j=1,\dots,m$)

דוגמאות

1. $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&0\\-1&-2\end{pmatrix} \Leftarrow A^t=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&0&-2\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}1&3\\-1&2\end{pmatrix} \Leftarrow A^t=\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}$.

<u>תכונות המטריצה המשוחלפת</u>

א. אם $A,B\in\mathbb{F}^{m\times n}$ אז $(A+B)^t=A^t+B^t$.

ב. אם $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ו $B\in\mathbb{F}^{n\times k}$ אז הכפל B^tA^t מוגדר היטב ומתקיים $(AB)^t=B^tA^t$.

<u>הוכחה</u>

א. נסמן $C=A+B$ ואז $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. אם $D=C^t$ אז $d_{ij}=c_{ji}=a_{ji}+b_{ji}$.

האיבר בשורה ה i והעמודה ה j של A^t הוא a_{ji}.

האיבר בשורה ה i והעמודה ה j של B^t הוא b_{ji}.

נסמן $F=A^t+B^t$ ואז $f_{ij}=a_{ji}+b_{ji} \Leftarrow d_{ij}=f_{ij} \Leftarrow D=F$.

ב. מספר העמודות של A הוא n ולכן מספר השורות של A^t הוא n.

מספר השורות של B הוא n ולכן מספר העמודות של B^t הוא n.

סה"כ מספר העמודות של B^t שווה למספר השורות של A^t ולכן הכפל B^tA^t מוגדר היטב.

נסמן $C=AB$ ואז $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$. אם $D=C^t$ אז $d_{ij}=c_{ji}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}$.

נסמן $F=B^t,G=A^t,H=FG$.

נקבל ש $h_{ij}=\sum_{k=1}^{n}f_{ik}g_{kj}=\sum_{k=1}^{n}b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a_{jk}b_{ki}$.

סה"כ נקבל ש $d_{ij}=h_{ij} \Leftarrow D=H$.

<u>דוגמא</u>

$B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\\-4&1\end{pmatrix}, A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&-2&-3\end{pmatrix} \Leftarrow AB=\begin{pmatrix}-6&1\\17&-3\end{pmatrix}$.

$B^t=\begin{pmatrix}1&-1&-4\\2&3&1\end{pmatrix}, A^t=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\\2&-3\end{pmatrix}$ מספר העמודות ב B^t שווה למספר השורות ב A^t ולכן

הכפל מוגדר.

$B^tA^t=\begin{pmatrix}-6&17\\1&-3\end{pmatrix}$ ואכן מתקיים $(AB)^t=B^tA^t$.

<u>תרגיל</u>

מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת סימטרית אם $A^t=A$ ואנטי-סימטרית אם $A^t=-A$.

א. הוכח שאם $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ אז AA^t היא מטריצה סימטרית.

ב. הוכח שאם $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אז $A-A^t$ היא מטריצה אנטי-סימטרית. (שימו לב שאם A לא מטריצה ריבועית אז לא ניתן לחשב את $A-A^t$).

פתרון

א. $\left(AA^t\right)^t=\left(A^t\right)^t A^t=AA^t$ ולכן AA^t היא מטריצה סימטרית.

ב. $\left(A-A^t\right)^t=A^t-\left(A^t\right)^t=A^t-A=-\left(A-A^t\right)$ ולכן $A-A^t$ היא מטריצה אנטי סימטרית.

מטריצות ריבועיות

הגדרה

מטריצה מסדר $n\times n$ נקראת מטריצה ריבועית.

תרגיל

מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת משולשית עליונה אם לכל $j<i$, $a_{ij}=0$.

הוכח שאם $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ משולשיות עליונות אז AB משולשית עליונה ו BA משולשית עליונה.

דוגמא לתרגיל

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&4\\0&0&3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&0&1\\0&0&3\end{pmatrix}.\ BA=\begin{pmatrix}2&0&7\\0&0&3\\0&0&9\end{pmatrix},AB=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&14\\0&0&9\end{pmatrix}.$$

פתרון התרגיל

מהמשפט הקודם נקבל שאם $C=AB$ אז $R_i\left(C\right)=R_i\left(A\right)B$.

ראינו ש $R_i\left(C\right)=\begin{pmatrix}\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{t1} & \sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{t2} & . & . & . & \sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tk}\end{pmatrix}$, ולכן מספיק להוכיח שאם $j<i$ אז $\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tj}=0$.

נניח ש $j<i$.

מכיוון ש B משולשית עליונה נקבל שאם $j<t$ אז $b_{tj}=0$.

אם $t\le j$ מכיוון ש $j<i$ נקבל ש $t<i$ ואז מכיוון ש A משולשית עליונה נקבל ש $a_{it}=0$.

סה"כ קיבלנו שלכל $1\le t\le n$ או ש $b_{tj}=0$ או ש $a_{it}=0$ ולכן $a_{it}b_{tj}=0$ ואז $\sum_{t=1}^{n}a_{it}b_{tj}=0$.

הערה

מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ נקראת משולשית תחתונה אם לכל $i<j$, $a_{ij}=0$.

בדומה לתרגיל הקודם ניתן להראות שקבוצת המטריצות המשולשיות תחתונות סגורה לכפל.

מטריצה ריבועית היא משולשית אם היא משולשית עליונה או תחתונה.

מטריצות אלמנטאריות

פעולה ρ על מטריצה נקראת פעולת שורה אלמנטארית אם היא מבצעת על המטריצה את אחת הפעולות הבאות:

- $R_i\leftarrow R_i+\alpha R_j$.
- $R_i\leftarrow\alpha R_i$ כאשר $\alpha\ne 0$.
- $R_i\leftrightarrow R_j$.

דוגמא

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&1\\0&2&-3\end{pmatrix}$, ρ היא הפעולה $R_2 \leftarrow R_2+3R_3$ אז $\rho(A)=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&8&-8\\0&2&-3\end{pmatrix}$.

המטריצה $\rho(I)$ נקראת מטריצת שורה אלמנטארית, או פשוט מטריצה אלמנטארית.

דוגמא

$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, ρ היא הפעולה $R_2 \leftarrow R_2+3R_3$ אז $\rho(I)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

נשים לב ש

$$\rho(A)=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&8&-8\\0&2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&1\\0&2&-3\end{pmatrix}=\rho(I)A \ .$$

פעולה ρ על מטריצה נקראת פעולת עמודה אלמנטארית אם היא מבצעת על המטריצה את אחת הפעולות הבאות:

- $C_i \leftarrow C_i+\alpha C_j$.
- $C_i \leftarrow \alpha C_i$ כאשר $\alpha \neq 0$.
- $C_i \leftrightarrow C_j$.

במקרה זה המטריצה $\rho(I)$ נקראת מטריצת עמודה אלמנטארית.

דוגמא

$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, ρ היא הפעולה $C_3 \leftarrow C_3+3C_2$ אז $\rho(I)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

קיבלנו שמטריצת העמודה האלמנטארית היא מטריצת השורה האלמנטארית מהדוגמא הקודמת.

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&1\\0&2&-3\end{pmatrix}$, ρ היא הפעולה $C_3 \leftarrow C_3+3C_2$ אז $\rho(A)=\begin{pmatrix}1&2&9\\-1&2&7\\0&2&3\end{pmatrix}$.

$$\rho(A)=\begin{pmatrix}1&2&9\\-1&2&7\\0&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&1\\0&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=A\rho(I) \ .$$

דוגמא

$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, ρ היא הפעולה $R_2\leftarrow R_2+3R_3$ אז $\rho(I)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

הפעולה ρ^{-1} היא הפעולה $R_2\leftarrow R_2-3R_3$ ואז $\rho^{-1}(I)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}$, אכן מתקיים

$\rho^{-1}(\rho(I))=\rho(\rho^{-1}(I))=I$.

הגדרה

מטריצה A היא הפיכה אם יש מטריצה B כך ש $AB=BA=I$. במקרה כזה, אומרים ש B היא מטריצה הופכית ל A וכותבים $B=A^{-1}$.

דוגמא

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

הערה

מכיוון ש $AB=BA=I$ נקבל שהכפל AB,BA מוגדר ולכן המטריצות A,B חייבות להיות ריבועיות.

אם A הפיכה ו $B=A^{-1}$ נקבל ש $AB=BA=I$ ולכן $A=B^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{-1}$.

משפט

אם A מטריצה הפיכה אז יש רק מטריצה אחת B שהיא הופכית ל A .

הוכחה

נניח ש B,C מטריצות הופכיות ל A ונוכיח ש $B=C$.

$B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C$.

טענה

$(x_1\quad .\quad .\quad .\quad .\quad x_m)A=\sum_{i=1}^{m}x_iR_i(A)$.

דוגמא לטענה

$A=\begin{pmatrix}1&-2\\0&-3\\2&1\\3&0\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-1\end{pmatrix}A=\sum_{i=1}^{m}x_iR_i\left(A\right)=1\cdot\begin{pmatrix}1&-2\end{pmatrix}+\left(-2\right)\begin{pmatrix}0&-3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2&1\end{pmatrix}+\left(-1\right)\begin{pmatrix}3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&7\end{pmatrix}$$

<u>משפט</u>

תהא ρ פעולת שורה אלמנטארית. הוכח:

א. לכל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $\rho\left(A\right)=\rho\left(I\right)A$.

ב. אם A,B מטריצות כך שהכפל AB מוגדר, מתקיים $\rho\left(AB\right)=\rho\left(A\right)B$.

ג. המטריצה $\rho\left(I\right)$ הפיכה, ומתקיים $\rho\left(I\right)^{-1}=\rho^{-1}\left(I\right)$.

<u>דוגמאות למשפט</u>

א.

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\-1&0\\-2&-3\end{pmatrix}$ פעולת שורה אלמנטארית ρ $R_3\leftarrow R_3-2R_1$ ואז $\rho\left(A\right)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\-3&-4\\-2&-3\end{pmatrix}$.

$\rho\left(I\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ $\quad$ $\rho\left(A\right)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\-3&-4\\-2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\-1&0\\-2&-3\end{pmatrix}$.

ב.

$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\-1&0\\-2&-3\end{pmatrix}$ פעולת שואה אלמנטארית ρ $R_3\leftarrow R_3-2R_1$ ואז $\rho\left(A\right)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\-3&-4\\-2&-3\end{pmatrix}$.

$B=\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}$ $\quad$ $\begin{pmatrix}-1&8\\-1&18\\-1&-2\\1&-13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\-1&0\\-2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}=AB$ ואז $\rho\left(AB\right)=\begin{pmatrix}-1&8\\-1&18\\1&-18\\1&-13\end{pmatrix}$.

$$\rho(A)B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\-3&-4\\-2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&8\\-1&18\\1&-18\\1&-13\end{pmatrix}\cdot$$

ג.

כאשר ρ היא הפעולה $R_2\leftarrow R_2+3R_3$ והפעולה ההפוכה ρ^{-1} היא $R_2\leftarrow R_2-3R_3$.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot$$

<u>תרגיל</u>

תהא $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}$ הבע את A ואת A^{-1} כמכפלת 3 מטריצות אלמנטאריות.

<u>פתרון</u>

נדרג את המטריצה A .

$$\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{R_1\leftrightarrow R_2}{\approx}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{R_2-R_3\to R_2}{\approx}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\overset{R_1-R_2\to R_1}{\approx}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\rho(A)=\rho(I)A$$

עבור הפעולה $R_1\leftrightarrow R_2$ נקבל את המטריצה האלמנטארית $E_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ואז

$E_1A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. עבור הפעולה $R_2-R_3\to R_2$ נקבל את המטריצה האלמנטארית

$$E_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ואז $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(E_2E_1\right)A = E_2\left(E_1A\right)$. עבור הפעולה $R_1 - R_2 \to R_1$ נקבל את המטריצה

האלמנטארית $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ואז $\left(E_3E_2E_1\right)A = I$ ולכן $A^{-1} = E_3E_2E_1$.

$\left(A^{-1}\right)^{-1} = \left(E_3E_2E_1\right)^{-1} = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$.

מטריצה הופכית של מטריצה אלמנטארית היא גם מטריצה אלמנטארית.

$E_1^{-1} = E_1$. הפעולה ההפוכה לפעולה $R_2 - R_3 \to R_2$ היא הפעולה $R_2 + R_3 \to R_2$ ולכן

$E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

הפעולה ההפוכה לפעולה $R_1 - R_2 \to R_1$ היא הפעולה $R_1 + R_2 \to R_1$ ולכן $E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>מציאת המטריצה ההופכית</u>

אם נרצה למצוא את המטריצה ההופכית A נרשום את המטריצה $\left(A|I\right)$ ונדרג את המטריצה A עד שתתקבל הצורה הקנונית. עם במהלך הדירוג נראה שהמטריצה A שקולת שורה למטריצה עם שורת אפסים אז המטריצה A לא הפיכה, אחרת נקבל מטריצה מהצורה $\left(I|B\right)$ ואז B היא ההופכית של A.

<u>תרגיל</u>

מצאו את המטריצה ההופכית של $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$.

<u>פתרון</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{\overset{\substack{-2R_1+R_2\to R_2 \\ -4R_1+R_3\to R_3}}{}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\approx}{\overset{R_2+R_3\to R_3}{}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\approx}{\overset{\substack{R_1+2R_3\to R_1 \\ R_2-R_3\to R_2 \\ -R_3\to R_3}}{}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{\approx}{\overset{-R_2\to R_2}{}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right)$$