בס"ד

אינפי 1 - תרגול 3

נתחיל בכמה תרגילים על היפר ממשיים לרענון.

1. יהי x היפר ממשי, $b<x<a$ כש a,b סופיים. הוכיחו שx סופי.

פתרון: b סופי, ולכן קיים r_1 ממשי כך ש- $r_1<b$ (אחרת b היה אינסופי חיובי). בנוסף, a סופי ולכן קיים r_2 ממשי כך ש- $a<r_2$ (אחרת a היה אינסופי שלילי). קיבלנו: $r_1<b<x<a<r_2 \Rightarrow$ $r_1<x<r_2$, לכן x סופי.

2. יהי x היפר ממשי, $H<x$, כאשר H היפר ממשי שלילי! הוכיחו ש x היפר ממשי שלילי!

מיותר

פתרון: יהי r ממשי. $r<H<x \Rightarrow r<x$. x אינסופי שלילי!

3. הוכיחו שלכל a,b כך ש- $b<a$, $b<\frac{b+a}{2}<a$

פתרון: $b=\frac{2b}{2}=\frac{b+b}{2}<\frac{b+a}{2}<\frac{a+a}{2}=\frac{2a}{2}=a$

הגדרה: יהי $a\in R^*$ סופי. נגדיר את החלק הסטנדרטי של a להיות המס' הממשי הקרוב אליו ביותר, כלומר, מס' ממשי שבינו לבין a ההבדל הוא אינפיניטסימלי. נסמן ב- $st(a)$.

עד כדי אינפיניטסימל

הערה: $a=st(a)+\varepsilon$, כאשר ε אינפיניטסימלי.

תרגיל: הוכח שלכל a, $st(a)$ הוא יחיד.

פתרון: נניח שקיים r_1 ממשי כך ש- $a=r_1+\varepsilon$, וגם קיים r_2 ממשי כך ש- $a=r_2+\delta$. אז, $r_1+\varepsilon=a=r_2+\delta$

$$r_2+\delta=r_1+\varepsilon$$

$$\underbrace{r_1-r_2}_{\text{ממשי}}=\underbrace{\delta-\varepsilon}_{\text{אינפי'}}$$

לפי משפט שהוכחנו, הממשי היחיד שהוא גם אינפיניטסימלי הוא 0.

לכן, $r_1-r_2=\delta-\varepsilon=0$

$$\Downarrow$$

$$r_1=r_2$$

סימון: אם $a'-a$ אינפיניטסימלי נסמן $a'\approx a$ ונאמר ש- a ו-a' "קרובים אינפיניטסימלית" אינסופית

תכונות של החלק הסטנדרטי:

1. $st(-a)=-st(a)$
2. $st(a+b)=st(a)+st(b)$

המשך

3. $st(a-b)=st(a)-st(b)$

4. $st(a\cdot b)=st(a)\cdot st(b)$

5. אם $st(b)\neq 0$, אז $st(\frac{a}{b})=\frac{st(a)}{st(b)}$

6. $st(a^n)=(st(a))^n$

7. אם $a\geq 0$ אז $st(\sqrt[n]{a})=\sqrt[n]{st(a)}$

8. אם $a\leq b$ אז $st(a)\leq st(b)$

נוכיח את תכונה 7.

<u>הוכחה:</u> נסמן $st(a)=b$. כלומר, $a=b+\epsilon$. בנוסף, נסמן $st(\sqrt[n]{a})=c$

כלומר, $\sqrt[n]{a}=c+\delta$. נרצה להראות ש $\sqrt[n]{b}=c$.

ולכן, $c+\delta=\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{b+\epsilon}\ /(\ )^n$

$$(c+\delta)^n=b+\epsilon$$

$$st((c+\delta)^n)=st(b+\epsilon)=b$$

מתכונה 6 ידוע ש- $st((c+\delta)^n)=[st(c+\delta)]^n=c^n$

קיבלנו $c^n=b \Rightarrow c=\sqrt[n]{b}$, מש"ל

<u>תרגיל:</u> 1. הוכח, אם a סופי, r ממשי, $st(a)<r$, אז $a<r$.

<u>פתרון:</u> נניח בשלילה ש $r\leq a$. ידוע ש $a=st(a)+\epsilon$

לפי סעיף 8 במשפט נקבל $st(a)\geq st(r)$ אבל r ממשי לכן $st(a)\geq r$ סתירה

~~$st(a)+\epsilon\geq r$~~

~~$\epsilon\geq \underbrace{r-st(a)}_{\text{ממשי}}>0$~~

~~$\Downarrow$ כי $r>st(a)$~~

אם ϵ שלילי, זה לא יתכן. אם ϵ חיובי, אז הוא צריך להיות

גדול ממספר ממשי חיובי, ושוב לא יתכן. קיבלנו סתירה!

2. <u>הוכח:</u> אם $st(a)<st(b)$, קיים r ממשי כך ש- $a<r<b$

<u>פתרון:</u> נוכיח ש- $b\underset{\mathrm{I}}{>}\frac{st(a)+st(b)}{2}\underset{\mathrm{II}}{>}a$. (שימו לב שזהו מס' ממשי)

הוכחת I. (נב"ש ש $b\geq\frac{st(a)+st(b)}{2}$. לפי סעיף 8, זה גורר ש-

$$st\left(\frac{st(a)+st(b)}{2}\right)\geq st(b)$$

$\frac{St(a)+St(b)}{2}$ ממשי

(1 $\Leftarrow \frac{St(a)+St(b)}{2} \geq St(b)$

כי לא מס' ממשי.

ולכן שווה ל- St של עצמו.

$\Leftarrow St(a)+St(b) \geq 2St(b)$

$St(a) \geq St(b)$ בסתירה לנתון.

II נניח $a > \frac{St(a)+St(b)}{2}$. $\Leftarrow St(a) \geq St\left(\frac{St(a)+St(b)}{2}\right) \Leftarrow$

$St(a) \geq \frac{St(a)+St(b)}{2} \Leftarrow 2St(a) \geq St(a)+St(b) \Leftarrow St(a) \geq St(b)$

סתירה!

<u>תרגיל</u>: בכל אחד מהמקרים הבאים מצא את החלק הסטנדרטי.

1. $\frac{2H+4}{3H-6}$

פתרון: $\frac{2H+4}{3H-6} = \frac{2+\frac{4}{H}}{3-\frac{6}{H}}$

$St\left(\frac{2H+4}{3H-6}\right) = St\left(\frac{2+\frac{4}{H}}{3-\frac{6}{H}}\right) = \frac{St(2+\frac{4}{H})}{St(3-\frac{6}{H})} = \frac{2}{3}$

2. $\frac{4}{3H-6}$

פתרון: כי מס' אינפי' ולכן החלק הסטנדרטי שלו הוא 0.

3. $\frac{2H+4}{3}$ <u>פתרון:</u> כי מס' אינסופי ולכן אין לו חלק סטנדרטי

4. $\frac{(x+\epsilon)(y+\epsilon)-xy}{\epsilon}$. <u>פתרון:</u> $\frac{(x+\epsilon)(y+\epsilon)-xy}{\epsilon} = \frac{xy+\epsilon y+\epsilon x+\epsilon^2-xy}{\epsilon}$

$= \frac{\epsilon y+\epsilon x+\epsilon^2}{\epsilon} = y+x+\epsilon$. $St(y+x+\epsilon) = y+x$

5. $\frac{b^2-25}{b-5}$ נניח $St(b)=5$ אבל $b \neq 5$

<u>פתרון:</u> $\frac{b^2-25}{b-5} = b+5$

$St(b+5) = St(b)+5 = 5+5 = 10$

6. $2H\left(\sqrt{1+\frac{1}{H}}-1\right)$

פתרון: נכפיל בצמוד ונקבל:

$2H\left(\sqrt{1+\frac{1}{H}}-1\right)\frac{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1} = 2H\,\frac{1+\frac{1}{H}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1}$

המשך

$$st\left(\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1}\right)=\frac{2}{st\left(\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1\right)}=\frac{2}{st\sqrt{1+\frac{1}{H}}+1}=$$

$$\frac{2}{\sqrt{st\left(1+\frac{1}{H}\right)}+1}=\frac{2}{\sqrt{1}+1}=\frac{2}{2}=1$$

7. פתרון: $\frac{H+1+\varepsilon}{2H-1+3\varepsilon}$

$$\frac{H+1+\varepsilon}{2H-1+3\varepsilon}=\frac{1+\frac{1}{H}+\frac{\varepsilon}{H}}{2-\frac{1}{H}+\frac{3\varepsilon}{H}}$$

$$st\left(\frac{1+\frac{1}{H}+\frac{\varepsilon}{H}}{2-\frac{1}{H}+\frac{3\varepsilon}{H}}\right)=\frac{st\left(1+\frac{1}{H}+\frac{\varepsilon}{H}\right)}{st\left(2-\frac{1}{H}+\frac{3\varepsilon}{H}\right)}=\frac{1}{2}$$

<u>תזכורת:</u> עבור $y=f(x)$ נסמן $\Delta x=x_2-x_1$, $\Delta y=y_2-y_1$.

אז: $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$. [(x_1,y_1) (x_2,y_2) הן 2 נקודות על הגרף של f).

כשמדובר לגבי ישר בין 2 נקודות כאלה, השיפוע שלו הוא $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

כשנרצה לחשב שיפוע של משיק, שהוא קו ישר שעובר בנקודה (x_1,y_1)

בלבד, נקח את הנקודה הזו ועוד נקודה שקרובה אליו באופן אינפיניטסימלי.

כלומר $\Delta x=\varepsilon$. ~~[illegible]~~ ניתן לשרטט קו ישר רק בעזרת 2 נקודות

<u>הגדרה:</u> $f'(x_1)=st\left(\frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x}\right)$. עבור Δx אינפיניטסימלי! שונה מ-0

הנגזרת קיימת ב-x_1 אם קיים חלק סטנדרטי, והוא לא תלוי בבחירת Δx.

<u>תרגילים:</u> בפו' הבאות, חשב נגזרת:

1. $y=ax+b$

$$y'=st\left(\frac{a(x+\Delta x)+b-(ax+b)}{\Delta x}\right)=$$

$$st\left(\frac{ax+a\Delta x+b-ax-b}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{a\Delta x}{\Delta x}\right)=st(a)=a$$

2. $y=x^2$

פתרון:

$$y'=st\left(\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2-x^2}{\Delta x}\right)=$$

$$st\left(\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}\right)=st(2x+\Delta x)=2x$$

3. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ הפונקציה אינה קיימת בנקודות $x<0$ שכן הנגזרת לא מוגדרת שם.

פתרון:

$$y'=st\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\Delta x}\right)=st\left(\frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x}}{\sqrt{x+\Delta x}\cdot\sqrt{x}}}{\Delta x}\right)=$$

$$st\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x}}{\Delta x(\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x})}\right) \underset{\text{כפל בצמוד}}{=} st\left(\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}{\Delta x(\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}\right)=$$

$$st\left(\frac{x-(x+\Delta x)}{\Delta x(\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}\right)= st\left(\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}\right)=$$

$$\frac{1}{st\left[(\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x})(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})\right]}=\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{st(x+\Delta x)}(\sqrt{x}+\sqrt{st(x+\Delta x)})}=\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{x})}=$$

$$\frac{1}{x\cdot 2\sqrt{x}}=\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

לא נכון

~~שימו לב: כש- $x=0$, מתקבל ש- st(מונה)$=0$, וגם אי אפשר לבצע בתכונה 2. במקרה זה, הגבול יוצא אינסופי, לכן אין לו חלק סטנדרטי. כלומר, לפונקציה $\frac{1}{\sqrt{x}}$ אין נגזרת בנקודה $x=0$.~~

4. $y=\sqrt{x^2+2}$

פתרון:

$$y'=st\left(\frac{\sqrt{(x+\Delta x)^2+2}-\sqrt{x^2+2}}{\Delta x}\right)\underset{\text{כפל בצמוד}}{=}$$

$$st\left(\frac{(x+\Delta x)^2+2-(x^2+2)}{\Delta x\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2+2}+\sqrt{x^2+2}\right)}\right)= st\left(\frac{x^2+2x\Delta x+\Delta x^2+2-x^2-2}{\Delta x\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2+2}+\sqrt{x^2+2}\right)}\right)=$$

$$st\left(\frac{2x\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2+2}+\sqrt{x^2+2}\right)}\right)= st\left(\frac{2x+\Delta x}{\sqrt{(x+\Delta x)^2+2}+\sqrt{x^2+2}}\right)=$$

$$\frac{st(2x+\Delta x)}{st\left(\sqrt{(x+\Delta x)^2+2}+\sqrt{x^2+2}\right)}=\frac{2x}{\sqrt{st(x+\Delta x)^2+2}+\sqrt{x^2+2}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+2}}=\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2}}$$

5. $y=|x+3|$

פתרון:

$$y'=st\left(\frac{|x+\Delta x+3|-|x+3|}{\Delta x}\right)$$

הוכחנו בתרגול שאם $st(a)<r$, r ממשי, אז גם $a<r$.

בדומה ניתן להראות: שאם $st(a)>r$ אז גם $a>r$