תזכורת:

R חוג חילופי. $I \triangleleft R$ אידאל, $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n=(0)$. הגדרנו טופולוגיה על R: תת-קבוצה $U\subseteq R$ פתוחה אם ורק אם לכל $x\in U$ קיים n כך ש $x+I^n\subseteq U$

ראינו שהטופולוגיה הזאת לא בהכרח שלמה (יכולות להיות סדרות קושי ללא גבול)

נרצה השלמה של R.

נבנה בשתי דרכים:

I יהי C החוג של כל הסדרות קושי $a_n\in R$, $\{a_n\}$ (חיבור וכפל איבר איבר).

זה מוגדר כי $\{a_n\},\{b_n\}\in C \Rightarrow \{a_n+b_n\}\in C,\ \{a_nb_n\}\in C$

אכן, לכל $x\in R$, $d(ax,bx)\le d(a,b)$ ($a\ne b$, $d(a,b)=\tau^n$ כאשר $n=\max\{m: a-b\in I^m\}$)

$a-b\in I^m \Rightarrow xa-xb\in I^m$. $d(x+a,x+b)=d(a,b)$.

$\{a_n\},\{b_n\}\in C$, יהי $\varepsilon>0$. קיים N כך שאם $n,m\ge N$ אזי $d(a_n,a_m)<\varepsilon$, $d(b_n,b_m)<\varepsilon$

$d(a_nb_n,a_mb_m)\le \max\{d(a_nb_n,a_mb_n),\ d(a_mb_n,a_mb_m)\}<\varepsilon$

אי שוויון המשולש החזק

לכן $\{a_nb_n\}\in C$

סדרה $\{a_n\}\in C$ נקראת אפסה אם $a_n\to 0$, כלומר לכל m קיים N כך שלכל $n\ge N$ מתקיים $a_n\in I^m$. יהי $Z\subseteq C$ קבוצת כל הסדרות האפסות. אז $Z\trianglelefteq C$.

נגדיר $\hat{R} = C/Z$ (האוסף של כל הגבולות של סדרות קושי ב-R)

II תהי S קבוצה סדורה חלקית. נניח שנתונים:

1) לכל $s\in S$, נתון חוג R_s

2) לכל $s\le t$, נתון הומ' $f_{st}:R_t\to R_s$

3) אם $s\le t\le u$, אזי $f_{su}=f_{st}\circ f_{tu}$

זוהי מערכת הפוכה (פרוייקטיבית) של חוגים.

הגדרה: בהינתן מערכת הפוכה כנ"ל, הגבול ההפוך שלה הוא:

$$\varprojlim_{S} R_s = \{(a_s)\in \prod_{s\in S} R_s \mid f_{st}(a_t)=a_s \quad \forall s\le t\}$$

(זה חוג, חיבור וכפל איבר איבר)

דוגמא:

יהי $S=\mathbb{N}$ עם הסדר הרגיל. יהי R חוג חילופי, $I\trianglelefteq R$ אידיאל (עם התנאי $\bigcap_{n=1}^{\infty} I^n=(0)$)

לכל $n\in\mathbb{N}$, יהי $R_n=R/I^n$. אז $m\le n$, $f_{mn}: R/I^n \to R/I^m$

$$r+I^n \longmapsto r+I^m$$

הגבול ההפוך הוא: $\varprojlim R_n = \{(a_1+I, a_2+I^2, \dots) \mid a_n\in R,\ m\le n \Rightarrow a_m-a_n\in R^m\}$

טענה:

יהיו R,I כנ"ל. אזי $\varprojlim R/I^n \simeq \hat{R}$

הוכחה:

נבנה איזומורפיזם $\varphi: \varprojlim R/I^n \to \hat{R}$ ברור שזה הומ' של חוגים.

$$(a_1+I, a_2+I^2, \dots) \longmapsto \underbrace{(a_1,a_2,\dots)}_{\in C}+Z$$

כי $a_m-a_{m'}\in I^n$ כאשר $m,m'\ge n$

φ חח"ע: יהי $(a_1+I, a_2+I^2,\dots)\in\ker\varphi$. אזי $(a_1,a_2,\dots)\in Z$. לכן, לכל m, $a_m\in I^m$ לכל n מספיק גדול, בפרט $n\ge m$. אבל $a_m-a_n\in I^m$. אז $n\ge m \Rightarrow a_m\in I^n \Rightarrow (a_1+I, a_2+I^2,\dots)=(0+I, 0+I^2,\dots)$

φ על: יהי $(a_1,a_2,a_3,\dots)+Z\in\hat{R}$. הרעיון הראשון הוא לקחת $(a_1+I, a_2+I^2,\dots)$ אבל אין סיבה שהתנאי $a_m-a_n\in I^n$ $(n\ge m)$ יתקיים. אבל $(a_1,a_2,\dots)\in C$ לכל m קיים N_m כך ש $a_{n'}-a_n\in I^m$ כאשר $n,n'\ge N_m$. יהי $b_m=a_{\max\{m,N_m\}}$. אזי $\{b_m\}$ היא תת-סדרה של סדרת קושי לכן סדרת קושי בעצמה. נראה ש $\{a_m\}+Z=\{b_m\}+Z$.

וגם, לכל $n\ge\max\{m,N_m\}$ מתקיים $b_n-a_n\in I^m$ $(b_n=a_{\max\{n,N_n\}}\ge\max\{m,N_m\})$

נשים לב כי $\underbrace{b_m}_{=a_{m'}}-\underbrace{b_n}_{=a_{n'}}\in I^m$ לכל $n\ge m$ $(m',n'\ge N_m)$

לכן,

$$\varphi(\underbrace{b_1+I, b_2+I^2,\dots}_{\in \varprojlim R/I^n}) = \{b_n\}+Z = \{a_n\}+Z$$

לכן φ על, והוא איזומורפיזם. בדרך כלל נחשוב על איברים של $\hat{R}$ כבצורה $(a_1+I, a_2+I^2,\dots)$

טענה:

יש שיכון $g:R\to\hat{R}$ $\quad g(r)=(r+I, r+I^2,\dots)$

הוכחה:

ברור כי g מוגדר היטב והומו׳. צריך להוכיח חח״ע. אם $g(r)=g(s)$, אזי $r+I^m=s+I^m$ לכל m $\Leftarrow r-s\in\bigcap_{m=1}^{\infty} I^m=(0) \Leftarrow r-s=0 \Leftarrow r=s$.

נגדיר $\hat{I}=\{(a_1+I,a_2+I^2,\dots): a_n\in I\ \forall n\in\mathbb{N}\}\trianglelefteq\hat{R}$

טענה:

נניח בנוסף ש-R נותרי. אזי לכל $m\ge 1$ מתקיים $\hat{I}^m=\{(a_1+I,a_2+I^2,\dots)\mid a_n\in I^m\ \forall n\in\mathbb{N}\}$

הוכחה:

יהי $J_m=\{(a_1+I,a_2+I^2,\dots)\mid a_n\in I^m\}$. צריך להוכיח כי $\hat{I}^m=J_m$

הכיוון $\hat{I}^m\subseteq J_m$ לא משתמש בנותריות. כל איבר של $\hat{I}^m$ הוא סכום של מכפלות

$\{\underline{a}_1\}\{\underline{a}_2\}\dots\{\underline{a}_m\}$ כאשר $\underline{a}_i\in\hat{I}$

$$\| $$

$$(a_{11}a_{21}\cdots a_{m1}+I, \underbrace{a_{12}a_{22}\cdots a_{m2}}_{\in I^m}+I^2,\dots)\in J_m$$

צריך להוכיח כי $J_m\subseteq\hat{I}^m$. יהי $(a_1+I,a_2+I^2,\dots)\in J_m$. אזי $a_1,a_2,\dots\in I^m$. אם R נותרי,

אזי I נוצר סופית, ולכן I^m נוצר סופית. (אם $y_1,\dots,y_n$ יוצרים את I, אז כל המכפלות של y_i-ים יוצרות את I^m)

יהיו $x_1,\dots,x_t\in R$ יוצרים של I^m. ניתן להציג את כל a_n בצורה $a_n=r_{n1}x_1+\dots+r_{nt}x_t$ $(r_{ij}\in R)$

תרגיל:

1) (תזכורת ה-r_{ij} לא בהכרח יחידים) לפי הגבלת הכלליות, אפשר להניח $r_{nj}-r_{kj}\in I^n$ לכל $k\geq n$ ולכל $1\leq j\leq t$

2) $J_m\subseteq \hat{I}^m$

תוצאה:

יהי R,I כנ"ל, R לא בהכרח נותרי. אזי $\bigcap_{m=1}^{\infty}\hat{I}^m=(0)$

הוכחה:

$\bigcap_{m=1}^{\infty}\hat{I}^m\subseteq\bigcap_{m=1}^{\infty}J_m=(0)$. לכן יש לנו טופולוגיה של האוסדורף על $\hat{R}$ שמוגדרת על ידי האידאל $\hat{I}$.

טענה:

אם R נותרי, אזי $\hat{R}$ שלם לטופולוגיה הנ"ל.

הוכחה:

תהי $\underline{a}_1,\underline{a}_2,\underline{a}_3,\dots$ סדרת קושי של איברים של $\hat{R}$

$\underline{a}_1=(a_{11}+I,a_{12}+I^2,\dots)$, $\underline{a}_2=(a_{21}+I,a_{22}+I^2,\dots)$

לכל m קיים N_m כך שלכל $n,n'\geq N_m$, $\underline{a}_n-\underline{a}_{n'}\in\hat{I}^m$ $\Leftarrow$ $a_{nj}-a_{n'j}\in I^m$ לכל $n,n'\geq N_m$ ולכל $j\geq m$.

יהי $b_m=a_{N_m,m}$. אזי $b_m+I^m=a_{nm}+I^m$ לכל n מספיק גדול. לכן לכל $n\geq m$:

$\underline{b}-\underline{a}_n=(\dots,0+I^m,c_{m+1}+I^{m+1},\dots)$

ולכל $n\geq m$ $c_n-0\in I^m\Leftarrow c_n\in I^m\Leftarrow \underline{b}-\underline{a}_n\in I^m\Leftarrow \underline{a}_n\to\underline{b}$.

לכן הוכחנו את השלמות.

טענה:

נניח R נתרי. אזי לכל $m\in\mathbb{N}$, $R/I^m \cong \hat{R}/\hat{I}^m$

הוכחה:

נתבונן בהעתקה $\varphi : R/I^m \to \hat{R}/\hat{I}^m$ זה מוגדר היטב.

$$r+I^m \longmapsto (r+I, r+I^2, \dots)+\hat{I}^m$$

שכן אם $s+I^m = r+I^m$ אזי $(r-s+I, r-s+I^2, \dots)\in \hat{I}^m$. ברור כי φ הומומורפיזם. נוכיח שהוא איזו.

φ חח"ע: נניח $r+I^m \in \ker\varphi$ אזי $(r+I, r+I^2, \dots)\in\hat{I}^m$ לכן $r\in I^m \Rightarrow r+I^m = 0+I^m$

φ על: יהי $(a_1+I, a_2+I^2, \dots)+\hat{I}^m \in \hat{R}/\hat{I}^m$ אזי $a_n - a_m \in I^m$ לכל $n\geq m$. לכן

$$(a_1+I, a_2+I^2, \dots) - (a_m+I, a_m+I^2, \dots) \in \hat{I}^m$$

לכן,

$$\varphi(a_m+I^m) = (a_1+I, a_2+I^2, \dots)+\hat{I}^m$$

ולכן φ על.

הגדרה: יהי R חוג חילופי. הרדיקל של ג'ייקובסון (Jacobson radical) של R הוא החיתוך של כל האידיאלים המקסימליים של R. מסמנים אותו $J(R)$. ברור כי $J(R)\trianglelefteq R$ (גם ברור $\sqrt{R}\subseteq J(R)$)

$\sqrt{R} = \{r\in R \mid \exists n\geq 1 \ \ r^n = 0\}$

טענה:

יהי R חילופי, $r\in R$. אזי $r\in J(R) \iff 1+rx$ הפיך לכל $x\in R$.

הוכחה:

($\Leftarrow$) נניח שקיים $x\in R$ כך ש $1+rx$ לא הפיך. אזי $(1+rx)$ הוא אידאל אמיתי, לכן מוכל באידאל מקסימלי M. לכן, $1+rx\in M$. אם $r\in J(R)$, אזי $r\in M \Rightarrow rx\in M \Rightarrow 1\in M$ וזה לא יתכן כי M אמיתי.

($\Rightarrow$) נניח $1+rx$ הפיך לכל $x\in R$. נניח בשלילה כי $r\notin J(R)$. אזי קיים אידאל מקסימלי

$M \triangleleft R$ כך ש $r \notin M$. לכן $M \subsetneq M+Rr$. M מקסימלי $\Leftarrow$ $M+Rr=R$ $\Leftarrow$ $1 \in M+Rr$

$\Leftarrow$ $1=m+rx$ עבור $m \in M$, $x \in R$

$1-rx \in M$ בסתירה להנחה כי $1-rx$ הפיך