פעולות של חבורות על קבוצות

הגדרה

בהינתן פעולת חבורה $\varphi : G \to S(X)$, מסלול של איבר $x \in X$

$$\theta(x) = \{\varphi(g)(x) : g \in G\}$$

דוגמה 3 - פעולת ההצמדה

G חבורה, $X = G$. $\varphi(g) = \sigma_g$

$$\sigma_g(x) = gxg^{-1}$$

מהו המסלול $\theta(x)$?

$$\theta(x) = \{\varphi(g)(x) : g \in G\}$$

$$= \left\{gxg^{-1} : g \in G\right\} = \mathrm{conj}(x)$$

כלומר המסלול של x הוא מחלקת הצמידות שלו.

הגדרה - נקודת שבת

$x \in X$ היא נקודה עבורה $\theta(x) = \{x\}$
דוגמאות:

1. למשל אם $X = G$ ו-φ זו פעולת ההצמדה אז e היא נקודת שבת.
2. אם $X = G$ ו-φ פעולת כפל משמאל $\theta(e) = G = X \Leftarrow e$ לא נקודת שבת.

משפט

היחס $x \sim y \Leftrightarrow y \in \theta(x)$ הוא יחס שקילות, לכל פעולת חבורה על קבוצה X.

מסקנות

א. $X=\coprod \theta\left(x\right)$ כאשר x נציגי מסלולים. X הוא איחוד זר של מסלולים.

ב. $\left|X\right|=\left|\left\{ \text{✡}\right\} \right|+\sum\limits_{\left|\theta\left(x\right)\right|\geq2}\left|\theta\left(x\right)\right|$ (כאשר $\left\{ \text{✡}\right\}$ קבוצת נקודות השבת).

הגדרה - המייצב של $x\in X$

$$G\supseteq\boxed{\mathrm{St}\left(x\right)}=C_{x}=\left\{ g\in G:\varphi\left(g\right)\left(x\right)=x\right\}$$

הערה

במסלול בוחרים את כל הנקודות שאפשר להגיע להן מx דרך העתקות. במייצב לוקחים את ההעתקות/התמורות (בעצם איברים בG) שעוברות דרך הנקודה x.

משפט

$$\mathrm{St}\left(x\right)\leq G$$

תרגיל

אם x נקודת שבת, מהו $\mathrm{St}\left(x\right)$?

פתרון

x נק' שבת $\Leftarrow$ לכל $g\in G$, $\varphi\left(g\right)\left(x\right)=x$ $\Leftarrow$ $\mathrm{St}\left(x\right)=G$

דוגמה

φ פעולת ההצמדה ו$x\in X=G$

$$\mathrm{St}\left(a\right)=\left\{ g\in G:\varphi\left(g\right)\left(a\right)=a\right\} =\left\{ g\in G:gag^{-1}=a\right\}$$

$$=\left\{ g\in G:ga=ag\right\} =Z_{a}$$

משפט

$$\left|\theta\left(x\right)\right|=\left[G:\mathrm{St}\left(x\right)\right]$$

מסקנה

$$|\theta(x)|\,|\,|G|$$

(בתנאי ש־$|G|<\infty$)

תרגיל בית

הביטו בדוגמאות הקודמות וראו כי אכן מתקיימת המסקנה.

תרגיל

הראו שבפעולות חבורה של G מגודל 27 על קבוצה X מגודל 223 יש בהכרח נקודות שבת.

פתרון

ידוע כי $X=\coprod\theta(x)$ ולכן $|X|=$ ומכיוון ש־$|\theta(x)|\,|\,|G|$, מקבלים $|\theta(x)|\in\{1,3,9,27\}$ לכל נציג מסלול x, ולכן

$$|X|=a\cdot 1+b\cdot 3+c\cdot 9+d\cdot 27$$

נניח בשלילה כי $a=0$, אז $223=b\cdot 3+c\cdot 9+d\cdot 27$. צד ימין מתחלק ב־3, צד שמאל לא $\Leftarrow$ סתירה $\Leftarrow$ $a>0$ $\Leftarrow$ ישנן נקודות שבת.

תרגיל ממבחן תשס"ז, מועד ב'

החבורה $S_4=S(\{1,2,3,4\})$ פועלת על הפולינומים בארבעה משתנים באופן הבא: לכל $\pi\in S_4$

$$\varphi(\pi)\left(f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)\right)=f\left(x_{\pi(1)},x_{\pi(2)},x_{\pi(3)},x_{\pi(4)}\right)$$

מצא את גודל המסלול והמייצב של $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1x_2$

פתרון

נחשב את הסדר של f, והמייצב יבוא בעצמו.

$$f\left(x_{\pi1},x_{\pi2},x_{\pi3},x_{\pi4}\right)=x_{\pi1}x_{\pi2}$$

$$\theta(f)=\{x_1x_2,x_1x_3,x_1x_4,...\}$$

$$|\theta(f)|=\binom{4}{2}=6$$

$$\frac{(24=)\left|S_4\right|}{\left|\mathrm{St}\left(f\right)\right|}=\left[S_4:\mathrm{St}\left(f\right)\right]=\left|\theta\left(f\right)\right|=6\Rightarrow\left|\mathrm{St}\left(f\right)\right|=4$$

משוואות מחלקות צמידות

$$x\in X,X=G$$

1. $\mathrm{conj}\left(x\right)=\left\{gxg^{-1}:g\in G\right\}$
2. $Z_x=\left\{g\in G:x=gxg^{-1}\right\}$
3. משפט: $\left|\mathrm{conj}\left(x\right)\right|=\left[G:Z_x\right]$
4. אם $x\in Z\left(G\right)$ אז $\mathrm{conj}\left(x\right)=\left\{x\right\}$ ו$Z_x=G$

משפט

φ פעולת הצמדה

$$X=G=\coprod\mathrm{conj}\left(x\right)$$

מסקנה

$$\left|X\right|=\left|G\right|=\left|Z\left(G\right)\right|+\sum_{conj\geq2}\left|\mathrm{conj}\left(x\right)\right|=\left|Z\left(G\right)\right|+\sum_{x\notin Z(G)}\left[G:Z_x\right]$$

(הסכום הראשון הוא של מחלקות צמידות גדולות שוות ל2)

תרגיל

G חבורה. הוכח כי אם ${}^{G}/_{Z(G)}$ ציקלית אזי G אבלית.

הוכחה

יהיו $x,y\in G$. מכיוון ש${}^{G}/_{Z(G)}$ ציקלית קיים $a\in G$ כך ש$\left\langle aZ\left(G\right)\right\rangle = {}^{G}/_{Z(G)}$. כעת $xZ\left(G\right)\in {}^{G}/_{Zm(G}$ ולכן $xZ\left(G\right)=a^iZ\left(G\right)$ לאיזשהו i. ובדומה $yZ\left(G\right)=a^kZ\left(G\right)$
$xZ\left(G\right)=a^iZ\left(G\right)\Leftarrow$קיים $z_1\in Z\left(G\right)$ כך ש$x=a^iz_1$ ובאופן דומה קיים $z_2\in$
$Z\left(G\right)$ כך ש$y=a^kz_2$

$$xy=a^iz_1a^kz_2=a^ia^kz_1z_2=a^ka^iz_2z_1=a^kz_2a^iz_1=yx$$

תרגיל

אם G מגודל $p\cdot q$ כאשר p וq ראשוניים אזי $Z\left(G\right)=G$ או $Z\left(G\right)=\left\{ e\right\}$

תרגיל

הראו שחבורה מסדר 15 היא אבלית.

הוכחה

נניח בשלילה ש$15>\left|Z\left(G\right)\right|$, אז לפי התרגיל הקודם $\left|Z\left(G\right)\right|=1$. עכשיו, כל מחלקת צמידות צריכה להיות מגודל $1,3,5$ נמחלקת צמידות היא מסלול ולכן גודלה מחלק את 15...]

$$15=1+a\cdot3+b\cdot5$$

עכשיו, $b\leq2$⇐$b=0$, $b=1$, $b=2$

- $b=0$⇐$15=1+a\cdot3$⇐$14=a\cdot3$ - סתירה כי $3\nmid14$
- $b=2$⇐$15=1+a\cdot3+10$⇐$4=a\cdot3$ - שוב סתירה כי $3\nmid4$

לכן $b=1$⇐ישנה מחלקת צמידות אחת מגודל 5: $\left\{ x,y,z,t,w\right\}$

$$\left|\theta\left(x\right)\right|=5$$

מה הסדר של x יכול להיות? הרי כל החזקות של x נמצאות בZ_{x} ולכן הסדר של x הוא $\cancel{1}$ או 3. עכשיו, ישנה מחלקת צמידות נוספת והיא כוללת

$$\left\{ x^{2},y^{2},z^{2},w^{2},t^{2},...\right\}$$

[נסביר למה הם שונים.]
אז זו מחלקה שכוללת לפחות 5 איברים, ולכן היא מגודל 5 ושווה למח' הקודמת.
$x\neq x^{2}$, בה"כ $x=y^{2}$⇐$y=x^{2}$.
$z=t^{2}$⇐$t=z^{2}$
$w=w^{2}$⇐$o\left(w\right)=1$⇐סתירה