תזכורת

R חוג עם יחידה, $x \in R$.

$$\langle x \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x \beta_i \middle| \alpha_i, \beta_i \in R, n \in \mathbb{N} \right\}$$

אידיאל הנוצר ע"י x.
האידאל המינימלי שמכיל את x.

תרגיל

יהי D חוג עם חילוק שאינו שדה כך ש$Z(D) = \mathbb{F} \neq D$. הוכח שלכל $d \in D \backslash \mathbb{F}$ מתקיים $D[x] = \langle x - d \rangle$

פתרון

נוכיח שהאידאל $\langle x - d \rangle$ מכיל איבר הפיך.
מכיוון ש$d \notin Z(D)$ קיים איבר $e \in D$ כך ש

$$ed \neq de \qquad f(x) = -e(x-d) + (x-d)e \in \langle x - d \rangle$$

$f(x) = ed - de \in \langle x - d \rangle$ מכיוון ש$0 \neq ed - de \in D$.
נקבל ש$ed - de$ הפיך בD כי D חוג עם חילוק. קיבלנו שלפונקציה $f(x)$ יש איבר הפיך ולכן $D[x] = \langle x - d \rangle$.

חוג מנה

יהי R חוג, $I \lhd R$. נגדיר על $R/I = \{a + I | a \in R\}$ חיבור וכפל באופן הבא:

$$(a+I)(b+I) = ab + I$$

$$(a+I) + (b+I) = a + b + I$$

ואז $(R/I, +, \cdot)$ הוא חוג. איבר האפס הוא I ואיבר היחידה הוא $1_R + I$.[1]

דוגמה 1

$R = 3\mathbb{Z}, I = 18\mathbb{Z}$.

$$R/I = \{a + I | a \in 3\mathbb{Z}\}$$

$$3\mathbb{Z}/I = \{0 + 18\mathbb{Z}, 3 + 18\mathbb{Z}, 6 + 18\mathbb{Z}, 9 + 18\mathbb{Z}, 12 + 18\mathbb{Z}, 15 + 18\mathbb{Z}\}$$

[1] אם R חוג ללא יחידה אז גם R/I יהיה חוג ללא יחידה.

נסמן כל קבוצה לפי הנציג שלה:

$$\begin{aligned}\overline{0} &= 0+18\mathbb{Z}\\ \overline{3} &= 3+18\mathbb{Z}\\ \overline{6} &= 6+18\mathbb{Z}\\ \overline{9} &= 9+18\mathbb{Z}\\ \overline{12} &= 12+18\mathbb{Z}\\ \overline{15} &= 15+18\mathbb{Z}\end{aligned}$$

נחשב לוח כפל:

$\cdot$	0	3	6	9	12	15
0	0	0	0	0	0	0
3	0	9	0	9	0	9
6	0	0	0	0	0	0
9	0	9	0	9	0	9
12	0	0	0	0	0	0
15	0	9	0	9	0	9

שימו לב: כחבורה חיבורית $\mathbb{Z}_6 \cong {}^{R}/_{I}$, אבל כחבורה כפילת נקבל ש$\mathbb{Z}_6 \ncong {}^{R}/_{I}$.

דוגמה 2

$\mathbb{R}$,$I = \langle x^2+1 \rangle$
נקבל ש$\mathbb{C} = {}^{\mathbb{R}}/_{I}$

הגדרה

איבר x בחוג R הוא נילפוטנט אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש$x^n = 0$.

תרגיל

R חוג קומוטטיבי, N קבוצת האיברים הנילפוטנטים בR.

1. הוכיחו כי N אידאל בR.
2. הוכיחו כי ב${}^{R}/_{N}$ אין איברים נילפוטנטים שונים מאפס.
3. תנו דוגמה לחוג לא קומוטטיבי כך שN לא אידאל.

פתרון

1. ניתן לראות באתר.

2. נניח בשלילה שיש איברים נילפוטנטים שונים מאפס בR/N.

$$0 \neq \overline{x} = x + N \in R/N$$

אם $x \in N \Leftarrow x + N \in N \Leftarrow x + N = \overline{0}$. מההנחה בשלילה קיים k טבעי כך ש$\overline{x}^k = \overline{0}$.

$$N = \overline{0} = \overline{x^k} = (x+N)^k = x^k + N \Rightarrow x^k \in N$$

ולכן x^k נילפוטנט, ז"א קיים l טבעי כך ש$\left(x^k\right)^l = 0 \Leftarrow x^{k \cdot l} = 0$.

3. נתבונן בחוג $R = M_2(\mathbb{R})$. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ נילפוטנטים, אבל $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ לא נילפוטנט.

משפט האיזומורפיזם הראשון

יהי $f : R \to S$ הומומורפיזם, אזי

$$R/\ker f \cong \mathrm{Im} f$$

דוגמה

$$f : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$$

$$f(g(x)) = g(i)$$

$$f\left(\overbrace{g_1(x) + g_2(x)}^{h(x)}\right) = g_1(i) + g_2(i) = f(g_1(x)) + f(g_2(x))$$

$$f(g_1(x) \cdot g_2(x)) = g_1(i) \cdot g_2(i) = f(g_1(x)) \cdot f(g_2(x))$$

יש להראות שהפונציה על. יהי $a+bi \in \mathbb{C}$. נתבונן ב$g(x) = a+bx$. $f(g(x)) = a+bi$. ז"א f על.

$$\ker f = \{x | f(g(x)) = 0\} = \{g(x) | g(i) = 0\} = \left\{g(x)\left(x^2+1\right)\right\} = \left\langle x^2+1 \right\rangle$$

הגדרה

$R \neq I \lhd R$ הוא אידאל מקסימלי אם לא קיים $R \neq J \lhd R$ כך ש$I \subseteq J$

דוגמאות

1. ב$\mathbb{Z}_{32}$ האידאל המקסימלי הוא $2\mathbb{Z}_{32}$.
2. אם $\mathbb{F}$ שדה, בחוג $\mathbb{F}[[x]]$ אז $\langle x\rangle$ הוא אידאל מקסימלי.
   $I=\langle x\rangle$ אידאל מקסימלי ב$\mathbb{F}[[x]]$, $I\subseteq\mathbb{F}[[x]]$, $I\subseteq J\subseteq\mathbb{F}[[x]]$

תרגיל

יהי $f:R\to S$ אפימורפיזם ויהי אידאל אמיתי $I\lhd R$ המכיל את הגרעין. אזי גם $f(I)\lhd S$ הוא אידאל אמיתי.

פתרון

להוכיח ש$f(I)$ אידאל של S - תרגיל בית.

רעיון אם $x\in S$ ($z\in R\Leftarrow$), $y\in f(I)\Leftarrow$ קיים $t\in I$ כך ש

$$y=f(t)\qquad x=f(z)$$

$$x\cdot y=f(t)\cdot f(z)=f(tz)\in f(I)$$

נניח בשלילה ש$I\lhd R$ אמיתי ובנוסף $f(I)=S$. מכיוון ש$I\lhd R$ אידאל אמיתי נקבל ש$R\neq I$, ז"א קיים $x\in R\backslash I$.

$f(I)=S$ ז"א קיים איבר $y\in I$ כך ש$f(y)=f(x)$.

$$x=y+(x-y)$$

בנוסף, $x-y\in\ker f$ - ולכן $x\in I$.

נשים לב ש$\ker f\subseteq I$. ולכן $x-y\in I$. $y\in I$ ומהסגירות נקבל ש$x=y+(x-y)$.

תרגיל

נהי $f:R\to S$ אפימורפיזם ויהי $I\lhd S$.
הוכח כי אם I מקסימלי אז $f^{-1}(I)$ גם מקסימלי.
נניח בשלילה ש$f^{-1}(I)$ אינו מקסימלי. ז"א קיים אידאל p כך ש$f^{-1}(I)\lhd p\lhd R$.

$$\ker f=f^{-1}(\{0\})\subseteq f^{-1}(I)$$

ולכן גם p מכיל את הגרעין. $f(p)$ מכיל ממש את I. $x=p\backslash f^{-1}(I)$. ז"א יש אידאל ביניים $S\rhd f(p)\rhd I$, ולכן I לא מקסימלי.