מבנים אלגבריים - תירגול 8

22 בדצמבר 2015

תהא G חבורה. Hת"ח תקרא נורמלית אם לכל g מתקיים $gH = Hg$
תנאי שקול $gHg^{-1} = H$ או $gHg^{-1} \subseteq H$ או $ghg^{-1} \in H$
במקרה ש H נורמאלית G/H היא חבורה ונקראת חבורת המנה.
דוגמא: בחבורה G חילופית כל תת חבורה נורמאלית. למשל $\mathbb{Z} \lhd \mathbb{Q}$ חבורת המנה היא

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{q + \mathbb{Z} : \ q \in \mathbb{Q}\}$$

הוכח או הפרך: תהא G חבורה בה כל איבר מסדר סופי אזי קיים n כך ש $\forall g \, g^n = e$
הפרכה: ב $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ כל איבר מסדר סופי אבל לא קיים n כנ"ל.
תרגיל: $A_n \lhd S_n$
פתרון: מתקיים כי $\frac{|S_n|}{|A_n|} = 2$. מש.ב. נקבל כי A_n נורמאלית
תרגיל: הוכח כי ת"ח הנורמאליות של S_4 הם
S_4 או $\{id\}$ או A_4 או $K = \{(i_1 i_2)(i_3 i_4), id : \{i_1, i_2, i_3, i_4\} = \{1,2,3,4\}\}$
הוכחה. תהא H ת"ח נורמאלית.
אם Hמכיל רק את id סיימנו.
אם $(1,2) \in H$ אזי גם

$$\sigma(1,2)\sigma^{-1} = (\sigma(1), \sigma(2)) \in H$$

כלומר כל החילופים. כיוון שהחילופים יוצרים את S_4 נקבל כי $H = S_4$
אם $(1,2,3) \in H$ אזי כל השלשות האחרות גם כן. בנוסף $(1,2)(3,4) = (1,2,3)(2,3,4)$ ולכן מכילה את כל התמורות הזוגיות.
או $H = A_4$ או $A_4 \subsetneq H$ ואז $H = S_4$ כי $|S_4| = 24 | |H| | 12 = |A_4|$ לפי לגרנז
אם $(1,2,3,4) \in H$ אזי כל הרביעיות האחרות גם כן. בנוסף $(1,2,3,4)(4,2,3,1) = (243)$ ולכן יכיל את כל השלשות וחזרנו למקרה הקודם.
המקרה האחרון הוא $(1,2)(3,4) \in H$ואז נקבל את K.
תרגיל: מצא את חבורת המנה בכל אחד מהמקרים:
פתרון $S_4/\{id\} \cong S_4$, $S_4/S_4 \cong \{e\}$ בנוסף כיוון ש $\frac{|S_n|}{|A_n|} = 2$ היא צקלית מסדר 2 ולכן $S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$.
טענה: מחלקת השקילות של $(1,2)$ ומחלקת השקילות של $(1,2,3)$ ב S_4/K אינן מתחלפות.
הוכחה: כי

$$\begin{aligned}(1,2)(1,2,3) &= (1,2)(1,2)(2,3) = (2,3) \\ (3,1,2)(1,2) &= (3,1)(1,2)(1,2) = (3,1)\end{aligned}$$

ואילו נציגים של מחלקות שקילות שונות כי

$$(3,1)^{-1}(2,3)=(1,3)(3,2)=(1,3,2)\notin K$$

מסקנה: $S_3 \cong {}^{S_4}/_{K}$ כי יש חבורה יחידה (עד כדי איזומ') מסדר 6 שאינה אבלית

משפט האיזומורפיזם הראשון:

יהיו G_1, G_2 חבורות ו $\phi : G_1 \to G_2$ הומו' אזי

1. התמונה $im(\phi)=\phi(G_1)\leq G_2$ ת"ח
2. הגרעין $ker(\phi)\leq G_1$ ת"ח נורמאלית
3. מתקיים ${}^{G_1}/_{ker(\phi)} \simeq im(\phi)$

הערה: אם ϕ על אזי ${}^{G_1}/_{ker(\phi)} \simeq G_2$
אם ϕ חח"ע אזי $G_1 \simeq im(\phi)$ (כי במקרה זה $\ker\phi=\{e\}$)
דוגמא $\phi : S_n \to \{-1,1\}$ פונקצית הסימן היא הומו' על
מה הגרעין?

$$ker\phi=\{\sigma:\ sgn(\sigma)=1\}=A_n$$

לכן לפי משפט האיז' מתקיים

$$ {}^{S_n}/_{A_n} \simeq \{-1,1\} \simeq \mathbb{Z}_2$$

תרגיל: הוכח כי $SL_n(\mathbb{F}) \lhd GL_n(\mathbb{F})$ ומתקיים כי ${}^{GL_n(\mathbb{R})}/_{SL_n(\mathbb{R})} \simeq \mathbb{R}^{\times}$
פתרון : יהא $A\in GL, B\in SL$ צ"ל $ABA^{-1}\in SL$ ואכן $|ABA^{-1}|=|A||B||A^{-1}|=$
$|A||A^{-1}|=1$
נגדיר $\phi : GL_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}^{\times}$ פונקצית הדט' ונקבל את המבוקש לפי משפט האיזו' הראשון.
תרגיל: נגדיר $G=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|=1\}$ מעגל היחידה עם פעולת כפל . הוכיחו כי

$$ {}^{\mathbb{C}^{\times}}/_{G} \cong \mathbb{R}_{>0}$$

פתרון: נגדיר פונקציה

$$\phi:\mathbb{C}^{\times}\to\mathbb{R}_{>0}$$

ע"י

$$z\mapsto|z|$$

.