פתרון תרגיל 3

26 באוגוסט 2017

1. תהי A קבוצה ו־$R \subseteq S$ יחסים מעליה. הוכיחו או הפריכו:
א. אם S לא סימטרי אז R לא סימטרי.
ב. אם S אנטי סימטרי אז R אנטי סימטרי.

פתרון:

א. הפרכה: $A = \{1,2\}, R = \phi, S = \{(1,2)\}$, אכן מתקיים ש־$R \subseteq S$, S לא סימטרי כי $(1,2) \in S \wedge (2,1) \notin S$ ו־R סימטרי באופן ריק.

ב. הוכחה: נניח S אנטי סימטרי ונוכיח שגם R כזה: נניח ש־$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R$. כיון ש־$R \subseteq S$ נקבל ש־$(a,b) \in S \wedge (b,a) \in S$. כעת מאנטי סימטריות של S נקבל $a = b$ כדרוש.

2. א. בקבוצה $\{2,3,4,...,999,1000\}$ הסדורה חלקית לפי $|$ (מחלק ללא שארית) ישנם בדיוק 500 איברים מקסימליים. מהם? נמקו.
ב. רשמו 10 איברים מינימליים בקבוצה סדורה זו. נמקו.
ג. האם יש בקס"ח זו איבר קטן ביותר או איבר גדול ביותר? אם כן, מהם? אם לא, הוסיפו 2 מספרים לקבוצה שימלאו תפקידים אלו. מה יהיו האיברים המינימליים והמקסימליים בקס"ח המורחבת? נמקו.

פתרון:

א. לכל n כך ש־ $501 \leq n \leq 1000$ מתקיים: n לא מחלק אף מספר בקבוצה ולכן מקסימלי, לכל שאר המספרים קיים בקבוצה מספר שהוא פי שניים מהם לכן הם מחלקים אותו ואינם מקסימליים.

ב. צריך פשוט לבחור מספרים ראשוניים שכמובן לא מתחלקים באף מספר, למשל

$$\{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,...\}$$

ג. אין איבר קטן ביותר וגם אין איבר גדול ביותר. אם היה אז הוא היה המקסימלי\מינימלי יחיד, והראנו שיש הרבה מקסימליים\מינימליים.

אם נוסיף את 1 הוא יהיה קטן ביותר, כי מחלק כל מספר, ו־$1000! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 999 \cdot 1000$ יהיה גדול ביותר כי כל איבר מחלק אותו. (אפשר למצוא "גדול ביותר" יותר קטן, למשל הכפולה המשותפת המינימלית).

3. תהי A קבוצה ויהי R יחס סדר חלקי על A.
א. נגדיר את היחס ההופכי של R על A בצורה הבאה: $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$.
הוכיחו כי R^{-1} יחס סדר חלקי.

ב. תהי $B \subseteq A$ נגדיר $S = R \cap (B \times B)$ הוכיחו כי S הוא יחס סדר חלקי על B.

פתרון:

א. רפלקסיביות: לכל $a \in A$ $(a,a) \in R$ ולפי הגדרת R^{-1} מתקיים $(a,a) \in R^{-1}$.

אנטי סימטרי: צ"ל $(a,b), (b,a) \in R^{-1} \longrightarrow a = b$

נניח כי $(a,b), (b,a) \in R^{-1}$ אז $(b,a), (a,b) \in R$ אבל R יחס סדר חלקי ולכן אנטי סימטרי לכן בהכרח $a = b$.

טרנזטיבי: $(a,b), (b,c) \in R^{-1} \longrightarrow (a,c) \in R^{-1}$.

נניח כי $(a,b), (b,c) \in R^{-1}$ אזי $(b,a), (c,b) \in R$ אבל R טרנזיטיבי (כי הוא יחס סדר) ולכן $(c,a) \in R$ ולכן $(a,c) \in R^{-1}$.

ב. רפלקסיבי: לכל $b \in B$ מתקיים $b \in A$ כי $A \subseteq B$, ולכן $(b,b) \in R$ (כי R רפלקסיבי כיחס מעל A). כמובן שמתקיים $(b,b) \in B \times B$ ולכן $(b,b) \in R \cap B \times B = S$.

אנטי סימטרי: נניח כי $(a,b), (b,a) \in S = R \cap B \times B$ אזי $(a,b), (b,a) \in R$ ולכן $a = b$ כי R אנטי סימטרי.

טרנזטיביות: נניח כי $(a,b), (b,c) \in S = R \cap B \times B$ אזי $(a,b), (b,c) \in R$ וגם $(a,b), (b,c) \in B \times B$ (מהגדרה של S כחיתוך של R עם $B \times B$)

לכן ניתן להסיק כי $(a,c) \in R$ כי R טרנזטיבי.

$(a,b), (b,c) \in B \times B$ לכן ניתן להסיק כי $(a,c) \in B \times B$ (כי מהגדרת מכפלה קרטזית בהכרח $a,b,c \in B$).

ולכן בסה"כ $(a,c) \in R \cap B \times B$.

4. הוכיחו או הפריכו:

א. A קבוצה, R יחס סדר חלקי מעל A. אם $a \in A$ איבר מינימלי יחיד ו־ $b \in A$ איבר מקסימלי יחיד, אזי $a = b$.

ב. A קבוצה סופית, R יחס סדר חלקי מעל A. אם $a \in A$ איבר מינימלי יחיד אז a הוא איבר קטן ביותר ב־A.

פתרון:

א. דוגמה נגדית: נתבונן ביחס R הבא על $\mathbb{Z}$: לכל $a,b \in \mathbb{Z}$:

$$(a,b) \in R \iff (a < 0 \land b < 0 \land a \le b) \lor (a \ge 0 \land b \ge 0 \land a \le b)$$

אזי נקבל שהאיבר המינימלי היחיד הוא 0 (הוא מתייחס רק עם האי־שליליים ושם הוא קטן מכולם, ובכל האיברים השליליים אין מינימלי כי תמיד אפשר להוריד 1), והאיבר המקסימלי היחיד הוא -1 (הוא מתייחס רק עם השליליים ושם הוא גדול מכולם, ובכל האיברים האי־שליליים אין מקסימלי כי תמיד אפשר להוסיף 1).

ב. נניח ש־a מינימלי יחיד נוכיח ש־a מינימום:

נסמן $B = \{b \in A \mid (a,b) \notin R\} \subseteq A$,

אם B ריקה אזי a קטן ביותר, וסיימנו. (נימוק אם B ריקה זה אומר לכל $b \in A$ מתקיים $(a,b) \in R$ שזה בדיוק הגדרת איבר קטן ביותר).

אם B אינה ריקה אזי בהכרח (כיון שהיא סופית) קיים בה איבר מינימלי נסמנו ב־b. הסבר: ניקח איבר, אם הוא מינימלי אז סיימנו, אחרת יש מישהו מתחתיו. אם הוא

מינימלי אז סיימנו, אחרת יש מישהו מתחתיו. נמשיך כך עד שנמצא מינימלי. זה נעצר כי הקבוצה סופית ולא ניתן לחזור למישהו שכבר נבדק, מטרנזיטיביות ואנטי־סימטריות.

b מינימלי גם ב־A נימוק: לכל $x \in A$ אם $b \neq x$ אם $x \in B$ אזי $(x,b) \notin R$ (כי b מינימלי). ואם $x \notin B$ אזי $(a,x) \in R$ ואם $(x,b) \in R$ מטרנזיטיביות נקבל ש־$(a,b) \in R$ סתירה ל־$b \in B$ ולכן $(x,b) \notin R$.

לכן b גם כן מינימלי בסתירה להיות a מינימלי יחיד, ולכן בהכרח B ריקה ו־a מינימום.

5. האם הפונקציות הבאות הן חח"ע? על? נמקו.
   א. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ המוגדרת ע"י $f(n) = |n|$.
   ב. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^3$.
   ג. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ מוגדרת ע"י: $f(n,m) = 2^n \cdot 3^m$.
   ד. תהי A קבוצה ו־$f : P(A) \to P(A)$ פונקציה המוגדרת לפי $f(B) = A \setminus B$.
   ה. תהי A קבוצה לא ריקה, $B \subset A$ (מוכל ממש) תת קבוצה, ו־$f : P(A) \to P(B)$ פונקציה המוגדרת לפי $f(C) = C \cap B$.
   ו. תהי A קבוצה לא ריקה, $B \subset A$ (מוכל ממש) תת קבוצה, ו־$f : P(B) \to P(A)$ פונקציה המוגדרת לפי $f(C) = C \cup (A \setminus B)$.
   ז. $f : P(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ המוגדרת ע"י: $f(\phi) = 1$, ולכל $A \neq \phi$ מגדירים $f(A) = \min(A)$, כלומר A נשלחת לאיבר הקטן ביותר שבה (לפי יחס הסדר הרגיל).
   ח. נסמן ב־ $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ את קבוצת כל הפונקציות מהטבעיים לעצמם. כלומר $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} | f \text{ is function}\}$. כעת ענו על השאלה עבור הפונקציה $f : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to P(\mathbb{N})$ המוגדרת ע"י $f(g) = Im(g)$.

<u>פתרון:</u>

א. על (כל איבר טבעי או אפס הוא המקור של עצמו). לא חח"ע כי $f(1) = f(-1)$.

ב. חח"ע ועל (תתבוננו בגרף של הפונקציה ותבינו).

ג. חח"ע: כיון ששניהים ראשוניים שונים, אם $(n,m) \neq (k,\ell)$ אז $2^n \cdot 3^m \neq 2^k \cdot 3^\ell$. לא על: לראשוניים אחרים אין מקור, למשל 5.

ד. נתייחס ל־A כקבוצה האוניברסלית לתרגיל זה. חח"ע: אם $C \neq D$ אז באחת הקבוצות יש איבר שאין בשניה. נניח לצורך העניין (קוראים לזה "בלי הגבלת הכלליות" וכותבים בה"כ) שקיים $x \in C \setminus D$ ולכן $x \in D^c \setminus C^c$ ולכן $C^c \neq D^c$, וזאת אומרת ש־f חח"ע. על: תהי $B \in P(A)$, אזי $f(B^c) = B$ ומצאנו מקור, ולכן היא גם על.

ה. חח"ע: לא, כי $f(A) = f(B) = B$. על: כן: לכל $C \in P(B)$ היא המקור של עצמה (כי $f(C) = C \cap B = C$).

ו. נתייחס ל־A כקבוצה האוניברסלית לתרגיל זה. חח"ע: כן: אם $C \neq D \in P(B)$, אז בה"כ קיים $x \in C \setminus D$ ולכן $x \in (C \cup B^c) \setminus (D \cup B^c)$ ולכן $x \in f(C) \setminus f(D)$ ולכן $f(C) \neq f(D)$ ולכן f חח"ע. על: לאו דוקא, אם ב־B^c יש לפחות שני איברים שונים, נסמנם x, y, אזי ל־$\{x\}$ אין מקור.

ז. לא חח"ע: $f(\phi) = f(\mathbb{N}) = 1$. על: כן, לכל $n \in \mathbb{N}$ הקבוצה $n\mathbb{N}$ (אוסף הכפולות של המספר) היא מקור.

ח. לא חח"ע: למשל הפונקציות הבאות נשלחות לאותו איבר $\{1,2\} \in P(\mathbb{N})$:

$$g_1(n) = \begin{cases} 1 & \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k \\ 2 & \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k-1 \end{cases}$$

$$g_2(n) = \begin{cases} 2 & \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k \\ 1 & \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k - 1 \end{cases}$$

6. הגדרה: תהי A קבוצה ו־$\leq$ יחס סדר חלקי עליה (כלומר $(A, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית). תהי $f : A \to A$ פונקציה. נאמר ש־f שומרת סדר אם מתקיים:

$$x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$$

ונאמר ש־f הופכת סדר אם מתקיים:

$$x \leq y \iff f(x) \geq f(y)$$

הוכיחו:
א. אם $f : A \to A, g : A \to A$ שומרות סדר, אז ההרכבה $g \circ f$ שומרת סדר.
ב. אם $f : A \to A, g : A \to A$ הופכות סדר, אז ההרכבה $g \circ f$ שומרת סדר.
ג. אם $f : A \to A$ שומרת סדר, ו־ $g : A \to A$ הופכת סדר, אז ההרכבה $g \circ f$ הופכת סדר.
<u>פתרון:</u>

א.

$$x \leq y \overset{*}{\iff} f(x) \leq f(y) \overset{**}{\iff} g(f(x)) \leq g(f(y)) \overset{\circ}{\iff} g \circ f(x) \leq g \circ f(y)$$

כאשר במעבר $*$ השתמשנו בכך ש־f שומרת סדר, במעבר $**$ בכך ש־g שומרת סדר ובמעבר $\circ$ בהגדרה של הרכבה.

ב.

$$x \leq y \overset{*}{\iff} f(x) \geq f(y) \overset{**}{\iff} g(f(x)) \leq g(f(y)) \overset{\circ}{\iff} g \circ f(x) \leq g \circ f(y)$$

כאשר במעבר $*$ השתמשנו בכך ש־f הופכת סדר, במעבר $**$ בכך ש־g הופכת סדר ובמעבר $\circ$ בהגדרה של הרכבה.

ג.

$$x \leq y \overset{*}{\iff} f(x) \leq f(y) \overset{**}{\iff} g(f(x)) \geq g(f(y)) \overset{\circ}{\iff} g \circ f(x) \geq g \circ f(y)$$

כאשר במעבר $*$ השתמשנו בכך ש־f שומרת סדר, במעבר $**$ בכך ש־g הופכת סדר ובמעבר $\circ$ בהגדרה של הרכבה.

7. תהיינה A, B, C, D קבוצות לא ריקות עם פונקציות $f : A \to C, g : B \to D$. נגדיר פונקציה $f \times g : A \times B \to C \times D$ ע"י:

$$f \times g(a, b) = (f(a), g(b))$$

הוכיחו:
א. f, g חח"ע $\iff$ $f \times g$ חח"ע.
ב. f, g על $\iff$ $f \times g$ על.
<u>פתרון:</u>

א. נניח f,g חח"ע, ונניח $f\times g(a_1,b_1)=f\times g(a_2,b_2)$. לכן נקבל $(f(a_1),g(b_1))=(f(a_2),,g(b_2))$, ומהגדרת זוג סדור נקבל

$$f(a_1)=f(a_2)\wedge g(b_1)=g(b_2)$$

כיון שהן פונקציות חח"ע נובע $a_1=a_2\wedge b_1=b_2$, ולכן $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$.

כעת נניח ש־$f\times g$ חח"ע, ונראה ש־f חח"ע, ובאותו אופן בדיוק ניתן להראות על g. נניח $f(a_1)=f(a_2)$ ויהי $b\in B$. לכן נקבל:

$$f\times g(a_1,b)=(f(a_1),g(b))=(f(a_2),g(b))=f\times g(a_2,b)$$

וכיון שהיא חח"ע נקבל $(a_1,b)=(a_2,b)$ ולכן $a_1=a_2$.

ב. נניח f,g על ויהי $(c,d)\in C\times D$. כיון שהן על יש $a\in A,b\in B$ כך ש $f(a)=c,g(b)=d$, ולפי הגדרה נקבל $f\times g(a,b)=(c,d)$.

נניח $f\times g$ על ונראה ש־f על, בואותו אופן בדיוק ניתן להראות על g. יהי $c\in C$. הקבוצות לא ריקות ולכן יש $d\in D$. $f\times g$ על ולכן יש $(a,b)\in A\times B$ כך ש $f\times g((a,b))=(c,d)=(f(a),g(b))$, כלומר $f(a)=c$ ומצאנו מקור.

8. תהיינה A,B קבוצות עם החלוקות $\{A_i\}_{i\in I},\{B_i\}_{i\in I}$. בנוסף, לכל $i\in I$ נתונה פונקציה חח"ע ועל:

$$f_i:A_i\to B_i$$

הוכיחו שקיימת פונקציה חח"ע ועל

$$f:A\to B$$

<u>פתרון:</u>

נרצה להגדיר פונקציה $f:A\to B$. יהי $a\in A$ כיון שמדובר בחלוקה יש בדיוק $i\in I$ אחד עבורו $a\in A_i$, ולכן נוכל להגדיר $f(a)=f_i(a)$.

חח"ע: נניח $f(a_1)=f(a_2)$, יש $i\in I$ כך ש $f(a_1)\in B_i$, לפי הגדרת הפונקציה f נקבל ש־$a_1,a_2\in A_i$ (רק משם יכולים להגיע איברים ל־B_i) ו־$f_i(a_1)=f_i(a_2)$. כיון ש־ f_i חח"ע, נקבל $a_1=a_2$.

על: יהי $b\in B$. לכן יש $i\in I$ כך ש־ $b\in B_i$. כיון ש־ f_i על אז יש $a\in A_i$ כך ש־ $f_i(a)=b$, ולפי הגדרה $f(a)=b$ והוא המקור.