תרגול מס' 10 במבנים אלגבריים 1

מיון חבורות אבליות סופיות

משפט: כל חבורה אבלית סופית G היא איזומורפית להצגה יחידה מהצורה:

$G=\mathbb{Z}_{n_1}\oplus\mathbb{Z}_{n_2}\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}_{n_k}$ עד כדי חילוף סדר בגורמים (הסימון $\oplus$ מקובל למכפלה ישרה בחבורות אבליות).

הגדרה: חבורה שהסדר שלה הוא חזקה של מספר ראשוני p נקראת **חבורת-** p.

מקרה פרטי: כל חבורה אבלית מסדר p^r איזומורפית למכפלה ישרה של תת-חבורות- p ציקליות:

$G\simeq\mathbb{Z}_{p^{r1}}\oplus\mathbb{Z}_{p^{r2}}\cdots\oplus\mathbb{Z}_{p^{rk}}$ כך ש: $r=\sum_{i=1}^{k}r_i$.

דוגמה: אם: $|G|=p$ אז ברור כי: $G\simeq\mathbb{Z}_p$. אם: $|G|=p^2$ אזי $G\simeq\mathbb{Z}_{p^2}$ או: $G\simeq\mathbb{Z}_p\oplus\mathbb{Z}_p$.

סימון: עבור מספר טבעי r, נסמן ב- $\rho(r)$ את מספר הטיפוסים השונים ב- S_r.

מסקנה: מספר החבורות האבליות הלא איזומורפיות מסדר p^r עבור p ראשוני הוא $\rho(r)$.

דוגמה: כמה חבורות אבליות לא איזומורפיות קיימות מסדר 8?

למספר $8=2^3$ ניתן לבנות את הסדרות הבאות: $(3),(2,1),(1,1,1)$ ובהתאם לכך החבורות הן:

$\mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ כלומר ישנן $\rho(3)=3$ חבורות כאלו.

לסדר p^5 קיימות הסדרות: $(5),(4,1),(3,2),(3,1,1),(2,2,1),(2,1,1,1),(1,1,1,1,1)$

כלומר קיימות $\rho(5)=7$ חבורות אבליות שאינן איזומורפיות.

באופן יותר כללי, בהינתן מספר טבעי כלשהו עם פירוק $n=p_1^{r_1}\cdot p_2^{r_2}\cdots p_k^{r_k}$, מספר החבורות האבליות הלא איזומורפיות מסדר זה הן: $\rho(r_1)\cdot\rho(r_2)\cdots\rho(r_k)$.

דוגמה: כמה חבורות אבליות לא איזומורפיות קיימות מסדר 18000 ?

פתרון: נכתוב: $18000=2^4\cdot 5^3\cdot 3^2$ ולכן המספר הוא: $\rho(4)\cdot\rho(3)\cdot\rho(2)=5\cdot 3\cdot 2=30$.

תרגיל: הוכח או הפרך: קיימות לפחות 4 חבורות לא איזומורפיות מסדר 8.

פתרון: נכון: $\mathbb{Z}_8,\ \mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_2,\ \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,\ D_4$ (יש גם את חבורת הקווטרניונים).

נוסחת המחלקה

הגדרה: ***המרכז (center)*** של חבורה G הוא הקבוצה: $Z(G):=\{x\in G:\ xy=yx\ \ \forall y\in G\}$.

הערה: $Z(G)\lhd G$.

דוגמאות:

א. $Z(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}))=\{cI_n : c\in\mathbb{R}^\times\}\simeq(\mathbb{R}^\times,\cdot)$.

ב. בתוך חבורת המטריצות האורתוגונליות: $\mathbf{O}_n(\mathbb{R})=\{A\in M_n(\mathbb{R}) : A\cdot A^t=I_n\}$

המרכז הוא: $Z(\mathbf{O}_n(\mathbb{R}))=\{\pm I_n\}\simeq\mathbb{Z}_2$.

ג. $Z(D_3)=\{e\}$, $Z(D_{2k})=\langle a^k\rangle\simeq\mathbb{Z}_2$

ד. $\forall n\geq 3:\ Z(S_n)=\{e\}$.

ה. חבורת Heisenberg מעל $\mathbb{Z}_p$ (p ראשוני) היא: $\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p)=\left\{\begin{pmatrix}1 & x & y\\ 0 & 1 & z\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} : x,y,z\in\mathbb{Z}_p\right\}$.

$$Z(\mathbb{H}(\mathbb{Z}_p))=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 & z\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} : z\in\mathbb{Z}_p\right\}\simeq\mathbb{Z}_p\ .$$

<u>תרגיל:</u> הוכח או הפרך: אם $H \leq G$ ת"ח אז: $Z(H) \leq Z(G)$.

<u>הפרכה:</u> $Z(D_3) = \{e\}$ אבל: $Z(\langle a \rangle) = \langle a \rangle$ באשר a הוא החילוף או השיקוף.

<u>הגדרה:</u> עבור כל איבר: $x \in G$, ***המרכז (centralizer)*** הוא הקבוצה: $C(x) := \{y \in G : \ xy = yx\}$.

<u>טענה:</u> $\forall x \in G : \ C(x) \leq G$.

<u>הוכחה:</u>

קיום יחידה: $1 \cdot x = x \cdot 1 \Rightarrow 1 \in C(x)$,

סגירות: $c_1c_2x = c_1xc_2 = xc_1c_2 \ \Rightarrow \ c_1c_2 \in C(x)$.

הופכיות: $xc^{-1} = c^{-1}x \ \Rightarrow \ cx = xc$. □

<u>הערות:</u>

1. $Z(G) = \bigcap_{x \in G} C(x)$.
2. $\forall x \in G : [G : C(x)] = |Conj(x)|$.

<u>תרגיל:</u> מצא את מספר התמורות ב- $\gamma \in S_n$ המתחלפות עם $\beta = (12)(34)$, כלומר תמורות γ המקיימות: $\beta\gamma = \gamma\beta$.

<u>פתרון:</u> $|C(\beta)| = \dfrac{|S_n|}{|Conj(\beta)|} = \dfrac{n!}{\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}} = 8(n-4)!$. לדוגמה ב- S_4 יש 8 תמורות כאלו.

<u>תשע"ג מועד א':</u> תהא G חבורה סופית כך ש: $n = \left[G : Z(G)\right]$.

הראה כי כל מחלקת צמידות ב- G מכילה לכל היותר n איברים.

<u>פתרון:</u> $\left|Conj(x)\right| = \left[G : C(x)\right] \geq \left[G : Z(G)\right] = n \;\Rightarrow\; Z(G) \leq C(x) \;:\; \forall x \in G$.

נוסחת המחלקה: תהא G חבורה סופית. אזי: $\left|G\right| = \sum_{x\ rep.} \left|Conj(x)\right| = \left|Z(G)\right| + \sum_{x\ rep.\ \notin Z(G)} \frac{\left|G\right|}{\left|C(x)\right|}$.

<u>תרגיל:</u> הראה שהמרכז של חבורת p אינו טריוויאלי.

<u>פתרון:</u> עפ"י נוסחת המחלקה: $\left|Z(G)\right| = p^n - \sum \frac{p^n}{\left|C(x_i)\right|} = p^n - \sum \frac{p^n}{p^{r_i}} = p^n - \sum p^{n-r_i}$.

כלומר p חייב לחלק את הסדר של $Z(G)$ ולכן $Z(G)$ לא יכול להיות טריוויאלי. □

<u>תרגיל:</u> הראה שחבורה בגודל p^2 איברים (p ראשוני) היא בהכרח אבלית.

<u>פתרון:</u> עפ"י הנ"ל המרכז אינו טריוויאלי, לכן עפ"י משפט לגרנז': $\left|Z(G)\right| \in \left\{p, p^2\right\}$.

אם $\left|Z(G)\right| = p^2$ סיימנו. אחרת, $Z(G)$ בגודל p, כלומר ציקלית: $Z(G) = \langle a \rangle$.

ניקח: $b \in G - Z(G)$. שוב עפ"י לגרנז' הסדר של $\langle a,b \rangle$ חייב להיות p^2, כלומר כל G. לכן מספיק להראות כי: $ab = ba$. ואכן זה נובע מכך ש: $a \in Z(G)$. לכן באמת: $G = Z(G)$.

<u>תרגיל:</u> אשר את גודל מחלקות הצמידות ב- A_4 עפ"י נוסחת המחלקה.

<u>פתרון:</u> שימו לב שמחלקת הצמידות של $\left(a\ b\ c\right)$ ב- S_4 בגודל $8 = 2 \cdot \binom{4}{3}$ חייבת להתפצל ב- A_4

שכן עפ"י ההערה הנ"ל גודלה של מחלקת צמידות מחלק את $\left|A_4\right| = 12$.

אכן בסה"כ: $1 + 3 + 2 \cdot 4 = 12$.