## תרגיל 4 - פתרון.

### שאלה 1 - סעיף 1.

א) יהי $0<t$, נרשום בעזרת פיתוח טיילור מסדר 1 סביב נקודה $a$:

$$f(a+t) = f(a) + f'(a)t + \frac{f''(c)}{2}t^2 \quad ; \quad a<c<a+t$$

$$f(a-t) = f(a) - f'(a)t + \frac{f''(d)}{2}t^2 \quad ; \quad a-t<d<a$$

נחסר, ונקבל:

$$f(a+t) - f(a-t) = 2f'(a)t + \frac{f''(c)-f''(d)}{2}t^2$$

$$\Rightarrow \quad 2t\cdot|f'(a)| = |2tf'(a)| = \left| f(a+t) - f(a-t) + \frac{f''(d)-f''(c)}{2}t^2 \right| \leq$$

$$\leq |f(a+t)| + |f(a-t)| + \frac{t^2}{2}\left(|f''(c)| + |f''(d)|\right) \leq$$

$$\leq 2M_0 + \frac{t^2}{2}(M_2+M_2) = 2M_0 + M_2t^2$$

ומכך הוכחנו כי לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים: $|f'(a)| \leq \frac{2M_0+M_2t^2}{2t}$

ולכן גם $M_1 = \sup_{a\in\mathbb{R}} |f'(a)| \leq \frac{2M_0+M_2t^2}{2t} \Leftarrow 2M_1t \leq 2M_0+M_2t^2$

והאי שוויון האחרון מתקיים לכל $t>0$, וגם $t\leq 0$ הוא מתקיים באופן טריוויאלי כי $M_0, M_1, M_2$ הם מספרים אי שליליים.

ב) מסעיף א' נובע כי לכל $t$ מתקיים: $0 \leq M_2t^2 - 2M_1t + 2M_0$,

ולכן, הדסקרימיננטה של הפולינום מימין באגף הוא מספר לא חיובי (אין לו שני שורשים שונים).

כלומר: $4M_1^2 - 8M_0M_2 \leq 0 \Leftarrow M_1^2 \leq 2M_0M_2$ -

כנדרש.

## שאלה 1 - סעיף 2

נתבונן בפיתוח מקלורן מסדר 2 עם שארית בצורת לגרנז'

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 =$$

$$= \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(c)}{6}x^3$$

כאשר $0<c<x$ או $x<c<0$

נציב $x = 1,-1$ ונקבל:

$$f(1) = 1 = \frac{f''(0)}{2} + \frac{f^{(3)}(c_1)}{6}, \quad 0<c_1<1,$$

$$f(-1) = 0 = \frac{f''(0)}{2} - \frac{f^{(3)}(c_2)}{6}, \quad -1<c_2<0.$$

נחסר, ונקבל:

$$f(1) - f(-1) = 1 = \frac{1}{6}\left(f^{(3)}(c_1) + f^{(3)}(c_2)\right)$$

כלומר: $f^{(3)}(c_1) + f^{(3)}(c_2) = 6$, ולכן לפחות אחד מהמחוברים לא קטן מ-3.

## שאלה 2 - סעיף 1

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{1/3} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}, \\ f''(x) = \frac{-2}{9}x^{-5/3}, \\ f^{(3)}(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3} \end{cases}$$

ניקח פיתוח טיילור של $f(x)$ סביב $x_0 = 27$:

$$\sqrt[3]{x} = f(27) + \frac{f'(27)}{1}(x-27) + \frac{f''(27)}{2!}(x-27)^2 + R_2(x)$$

כאשר: $R_2(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-27)^3, \quad 27<c<x$

ניקח $x=30$, אז: $\sqrt[3]{30} = 3 + \frac{1}{27}\cdot 3 + \left(\frac{-1}{3^7}\right)3^2 + R_2(30)$

כאשר:

$$|R_2(30)| = \left| \frac{\frac{-10}{27} c^{-8/3}}{3!} 3^3 \right| \quad , \quad 27<c<30 .$$

הפונקציה $x^{-8/3}$ יורדת, ולכן: $c^{-8/3}$ מקסימלי כאשר c מינימלי, ולכן:

$$|R_2(30)| \overset{c>27}{\leq} \frac{10}{27}\cdot\frac{1}{3^8}\cdot\frac{1}{3!}\cdot 3^3 = \frac{5}{3^9} = \frac{5}{81\cdot 81\cdot 3} < \frac{5}{80\cdot 80\cdot 3} < \frac{5}{10^4}$$

ולכן - $\sqrt[3]{30} \approx 3+\frac{1}{9}-\frac{1}{3^5} \pm 5\cdot 10^{-4} \approx 3.107 \pm 5\cdot 10^{-4}$ .

## שאלה 2 - סעיף ב

נשום פיתוחי מקלורן מסדר 3 (ודאו!):

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+R_3(x)$$

$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+S_3(x)$$

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+T_3(x)$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+Q_3(x)$$

די שימוש במשפט לפיו: אם $f^{(n)}(0)$ קיימת אזי מתקיים עבור השארית בפיתוח מקלורן מסדר n סביב x - $r_n(x)$: $\frac{r_n(x)}{x^n} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ ,

נקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_3(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{S_3(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{T_3(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{Q_3(x)}{x^3} = 0$$

. כעת נחשב:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-(x+1)}{\tan x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+R_3(x)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+Q_3(x)\right)-(x+1)}{\left(x+\frac{x^3}{3}+T_3(x)\right)-\left(x-\frac{x^3}{6}+S_3(x)\right)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-\frac{x^3}{3}+Q_3(x)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+R_3(x)\right)+R_3(x)\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{12}-(x+1)}{\frac{x^3}{2}+T_3(x)-S_3(x)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3}+\frac{Q_3(x)}{x^3}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+R_3(x)\right)+\frac{R_3(x)}{x^3}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)-\frac{x}{4}-\frac{x^2}{12}}{\frac{1}{2}+\frac{T_3(x)}{x^3}-\frac{Q_3(x)}{x^3}} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = -\frac{2}{3}$$