חורף תשע"ד

פונקציות מרוכבות למהנדסים

תרגיל כיתה 6: פונקציות אלמנטריות

1. פתרו את המשוואה $e^z + i = 0$.

עבור $z = x + iy$ נרשום $e^x(\cos y + i \sin y) + i = 0$ ונקבל את המשוואות

$$e^x \cos y = 0 \quad (1)$$
$$e^x \sin y + 1 = 0. \quad (2)$$

ממשוואה (1) נקבל $y = \pi/2 + \pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$.

מאחר ו $|e^z| = |e^x||e^{iy}| = |e^x| = e^x = 1$ נקבל $x = 0$. ממשוואה (2) נובע כי $y = 3\pi/2 + 2\pi k,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$.

לכן הפתרון הוא $z = i(3\pi/2 + 2\pi k),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$.

2. הראו כי e^z מחזורית $2\pi i$.

ידוע כי פונקציה $f(z)$ מחזורית T אם $f(z+T) = f(z)$.

באמת, $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$. נשאר להראות כי כל מחזור אחר הוא כפולה שלמה של $2\pi i$. נניח מחזור $T = T_0 + iT_1$. אזי $e^{z+T} = e^z e^T = e^z e^{T_0 + iT_1} = e^z$ כלומר $e^{T_0+iT_1} = e^{T_0} e^{iT_1} = 1$ ולכן $T_0 = 0$ ו $T_1 = 2\pi m,\ m = 0, \pm 1, \pm 2 ...$.

3. הראו כי $\cos z$ ו $\sin z$ מחזוריות 2π.

מהגדרת $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}/(2n)!$ ו $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n+1}/(2n+1)!$ נובעת נוסחת אויילר $e^{iz} = \cos z + i \sin z$. לכן, $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ ו $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$. כעת $(e^{iz} + e^{-iz})/2 = (e^{iz} + 1/e^{iz})/2$ ומאחר ו e^z מחזורית $2\pi i$ נקבל כי e^{iz} מחזורית 2π ולכן $\cos z$ מחזורית 2π. באופן דומה מראים כי $\sin z$ מחזורית 2π.