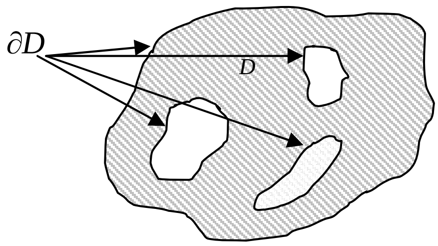
תרגול מס' 9
חישוב אינטגרלים בעזרת משפט קושי ונוסחת קושי

משפט קושי (קושי-גורסה):

יהי D תחום ששפתו חלקה למקוטעין, כך ש- D^c (המשלים) מורכב ממספר סופי של רכיבי קשירות (כלומר ל-D יש מספר סופי של "חורים"), ותהי f אנליטית ב-D, אז:

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$



נוסחת קושי:

יהי D תחום פשוט קשר, ששפתו ∂D חלקה למקוטעין, ותהי $f(z)$ אנליטית ב-$\bar{D}$.

אז לכל נקודה פנימית $z_0 \in D$ מתקיים: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}dz$.

נוסחת קושי המוכללת:

יהי D תחום פשוט קשר, ששפתו ∂D חלקה למקוטעין, ותהי $f(z)$ אנליטית ב-$\bar{D}$.

אז לכל נקודה פנימית $z_0 \in D$ מתקיים: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz$.

מסקנה מנוסחת קושי המוכללת:

אם f אנליטית בתחום D, אז f' גם היא אנליטית ב-D - כלומר f גזירה אינסוף פעמים.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Edouard Jean-Baptiste Goursat (1858-1936)

תרגיל מס' 1

חשבו: $\int\limits_{|z|=2} \frac{z-1}{\left(9+z^2\right)\left(z+i\right)} dz$.

פתרון

נסמן: $f\left(z\right)=\frac{z-1}{\left(9+z^2\right)}$.

ברור כי f אנליטית בתוך ועל המעגל $\left\{|z|=2\right\}$, והנק' $z=i$ נמצאת בתוך המעגל, ולכן עפ"י נוסחת קושי: $f\left(-i\right)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=2} \frac{f\left(z\right)}{z+i} dz$, ולכן:

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z-1}{\left(9+z^2\right)\left(z+i\right)} dz = 2\pi i \cdot f\left(-i\right) = 2\pi i \cdot \frac{-i-1}{\left(9+i^2\right)} = 2\pi i \cdot \frac{-\left(1+i\right)}{8} = \frac{\pi}{4}\left(1-i\right)$$

תרגיל מס' 2

חשבו: $\int\limits_{|z-1|=3} \frac{\cos z}{\left(z-i\right)^3} dz$

פתרון

הפונק' $f\left(z\right)=\cos z$ היא אנליטית בכל המישור, ולכן עפ"י נוסחת קושי המוכללת נקבל: $f''\left(i\right)=\frac{2!}{2\pi i}\cdot\int\limits_{|z-1|=3} \frac{f\left(z\right)}{\left(z-i\right)^3} dz$, ולכן:

$$\int\limits_{|z-1|=3} \frac{\cos z}{\left(z-i\right)^3} dz = \pi i \cdot f''\left(i\right) = -\pi i \cdot \cos\left(i\right) = -\pi i \cdot \frac{e^{i^2}+e^{-i^2}}{2} = -\frac{\pi}{2} i\left(e+e^{-1}\right)$$

תרגיל מס' 3

חשבו את: $\int\limits_C \frac{dz}{1+z^2}$, כאשר:

א. $C=\left\{z \mid |z-i|=\frac{1}{2}\right\}$

ב. $C=\left\{z \mid |z|=2\right\}$

פתרון

א. נשים לב, כי $\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{(z+i)(z-i)}$, ולכן המכנה של האינטגרנד מתאפס בנקודות: $z=\pm i$.

מבין הנקודות האלו, רק $z=i$ נמצאת בתוך C.

כעת, אם נגדיר: $g(z)=\frac{1}{z+i}$, אז נקבל: $\int_C \frac{dz}{1+z^2}=\int_C \frac{g(z)}{z-i}dz$.

כמו כן, ברור כי g אנליטית בתוך ועל C, ולכן עפ"י נוסחת קושי מתקיים:

$$g(i)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(z)}{z-i}dz$$

$$\Downarrow$$

$$\int_C \frac{g(z)}{z-i}dz=2\pi i\cdot g(i)=2\pi i\cdot\frac{1}{2i}=\pi$$

$$\Downarrow$$

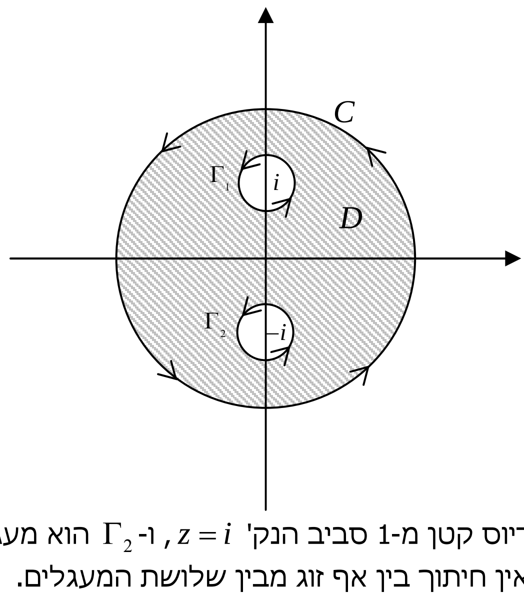
$$\boxed{\int_C \frac{dz}{1+z^2}=\pi}$$

ב. כעת, שתי הנקודות $z=i, z=-i$ נמצאות בפנים של המסלול C, ולכן אי אפשר להשתמש ישירות בנוסחת קושי.

נציג שתי דרכים לפתרון:

<u>דרך I</u>:

נבנה שני מסלולים חדשים, בתוך C:



כלומר, Γ_1 הוא מעגל ברדיוס קטן מ-1 סביב הנק' $z=i$, ו-Γ_2 הוא מעגל ברדיוס קטן מ-1 סביב הנק' $z=-i$. כך שאין חיתוך בין אף זוג מבין שלושת המעגלים.

הפונק' $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ היא אנליטית בתחום שכלוא בין 3 המעגלים, ולכן עפ"י משפט קושי-גורסה נסיק כי: $\int_{\partial D} f(z)dz=0$.

אבל: $\partial D=C-\Gamma_1-\Gamma_2$.

ולכן נקבל: $\int_C \frac{1}{1+z^2}dz - \int_{\Gamma_1} \frac{1}{1+z^2}dz - \int_{\Gamma_2} \frac{1}{1+z^2}dz = 0$

$$\Downarrow$$

$$\int_C \frac{dz}{1+z^2} = \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{1+z^2} + \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{1+z^2}$$

נחשב כל אחד מהאינטגרלים באגף ימין בנפרד.

ברור כי הפונק' $g(z) = \frac{1}{z+i}$ שהגדרנו בסעיף א' אנליטית בתוך Γ_1, ולכן עפ"י נוסחת קושי נקבל כמו בסעיף א': $\int_{\Gamma_1} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{\Gamma_1} \frac{g(z)}{z-i} = 2\pi i \cdot g(i) = \pi$.

כמו כן, הפונק' $h(z) = \frac{1}{z-i}$ אנליטית בתוך Γ_2, ולכן עפ"י נוסחת קושי נקבל:

$$\int_{\Gamma_2} \frac{dz}{1+z^2} = \int_{\Gamma_2} \frac{h(z)}{z+i} = 2\pi i \cdot h(-i) = -\pi .$$

ולסיכום, נקבל: $\boxed{\int_C \frac{dz}{1+z^2} = \pi + (-\pi) = 0}$.

<u>דרך II</u>:

נשים לב כי: $\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i} \cdot \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right)$, ולכן:

$$\int_C \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \int_C \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) dz = \frac{1}{2i} \int_C \frac{dz}{z-i} - \frac{1}{2i} \int_C \frac{dz}{z+i}$$

כעת, כל אחד מהאינגטגרלים באגף ימין ניתן לחישוב פשוט עפ"י נוסחת קושי:

נסמן $g(z) = 1$, אז ברור כי g אנליטית בתוך C, ולכן:

$$g(i) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{z-i} dz \Rightarrow \int_C \frac{dz}{z-i} = 2\pi i$$

$$g(-i) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{z+i} dz \Rightarrow \int_C \frac{dz}{z+i} = 2\pi i$$

ונקבל: $\boxed{\int_C \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2i} \cdot 2\pi i - \frac{1}{2i} \cdot 2\pi i = 0}$.

תרגיל מס' 4

חשבו: $I=\int\limits_{|z|=1}\frac{z+\overline{z}}{\left(z-z_0\right)^2}dz$, עבור $|z_0|\neq 1$.

פתרון

ראשית, נשים לב כי המונה באינטגרנד אינו אנליטי, לכן ננסה להביא את האינטגרנד לצורה יותר נוחה -

$$\frac{z+\overline{z}}{\left(z-z_0\right)^2}=\frac{z\left(z+\overline{z}\right)}{z\left(z-z_0\right)^2}=\frac{z^2+|z|^2}{z\left(z-z_0\right)^2}=\frac{z^2+1}{z\left(z-z_o\right)^2}$$

האינטגרל מחושב על המעגל $|z|=1$

כלומר, קיבלנו כי: $I=\int\limits_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z\left(z-z_0\right)^2}dz$.

כעת, נחלק לשלושה מקרים:

<u>מקרה I:</u> $|z_0|>1$

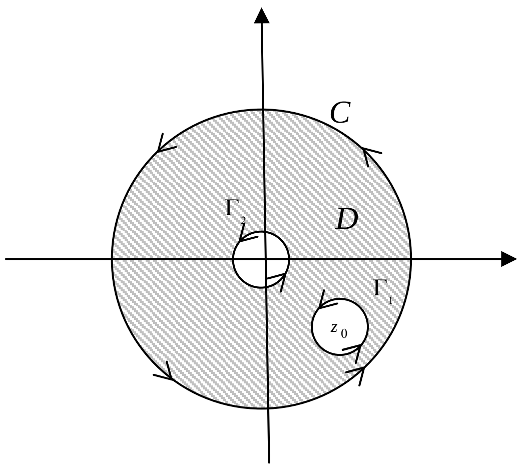
$z=0$ זוהי הנק' היחידה הבעייתית באינטגרנד, ולכן, אם נסמן: $g(z)=\frac{z^2+1}{\left(z-z_0\right)^2}$, אז נקבל

לפי נוסחת קושי: $\boxed{I=\int\limits_{|z|=1}\frac{g(z)}{z}dz=2\pi i\cdot g(0)=\frac{2\pi i}{z_0^2}}$.

<u>מקרה II:</u> $|z_0|<1, z_0\neq 0$

הנק' z_0 נמצאת בתוך המעגל. ולכן המכנה של האינטגרנד מתאפס בשתי נקודות בתוך המעגל, $z=0, z_0$.

כעת, ניצור שני מעגלים, אחד סביב $z=0$ והשני סביב z_0 -



וכמו בשאלה הקודמת, עפ"י משפט קושי-גורסה נקבל:

$$I=\int\limits_{|z=1|}\frac{z^2+1}{z\left(z-z_0\right)^2}dz=\int\limits_{\Gamma_1}\frac{g\left(z\right)}{\left(z-z_0\right)^2}dz+\int\limits_{\Gamma_2}\frac{h\left(z\right)}{z}dz$$

כאשר: $h\left(z\right)=\frac{z^2+1}{\left(z-z_0\right)^2}, g\left(z\right)=\frac{z^2+1}{z}=z+\frac{1}{z}$.

ולכן עפ"י נוסחת קושי נקבל:

$$\boxed{I=2\pi i\cdot g'\left(z_0\right)+2\pi i\cdot h\left(0\right)=2\pi i\cdot\left[1-\frac{1}{z^2}\right]_{z=z_0}+2\pi i\cdot\frac{1}{\left(-z_0\right)^2}=2\pi i\left(1-\frac{1}{z_0^2}+\frac{1}{z_0^2}\right)=2\pi i}$$

<u>מקרה III:</u> $z_0=0$

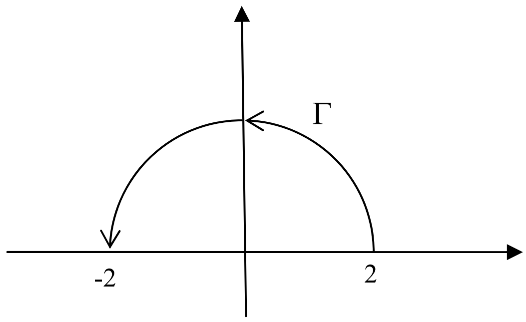
במקרה זה נקבל: $I=\int\limits_{|z|=1}\frac{z^2+1}{z^3}dz$.

ולכן, אם נסמן: $g\left(z\right)=z^2+1$, אז עפ"י נוסחת קושי המוכללת נקבל:

$$\boxed{I=\frac{2\pi i}{2!}g''\left(0\right)=\pi i\cdot\left[2\right]_{z=0}=2\pi i}$$

תרגיל מס' 5

נסמן: $I=\int\limits_{\Gamma}\frac{2z}{z^2+1}dz$, כאשר $\Gamma=\left\{z\mid |z|=2, \operatorname{Im} z\geq 0\right\}$ (בכיוון החיובי) –

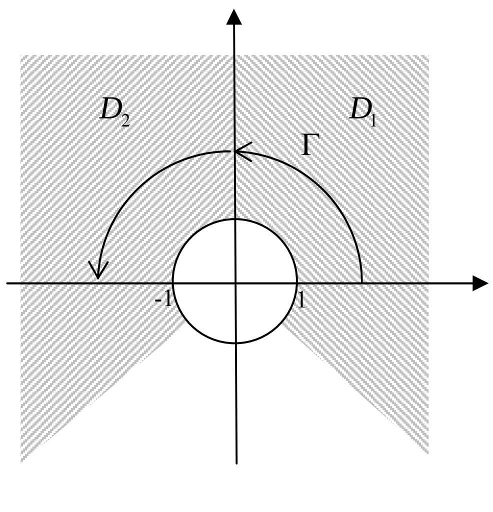


א. האם לאינטגרנד - $f\left(z\right)=\frac{2z}{z^2+1}$ יש פונק' קדומה בתחום פשוט קשר המכיל את Γ?

ב. חשבו את I.

פתרון

א. באופן כללי, אחד הניסוחים של משפט קושי אומר שאם f אנליטית בתחום פשוט-קשר כלשהו, אז ל- f יש קדומה בתחום זה. כעת, נסתכל על התחום D הבא:

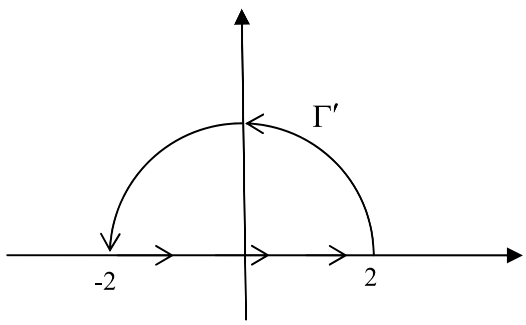


זהו תחום פשוט קשר הוא מכיל בתוכו את העקום Γ , והפונקציה $f\left(z\right)=\frac{2z}{z^2+1}$ אנליטית בו.
ולכן עפ"י משפט קושי, קיימת פונקציה קדומה של f בתחום זה.
לכן התשובה היא **כן**.

<u>שימו לב:</u> במקרה זה נתן לטעות ולחשוב (משיקולים לא נכונים, כמובן) שלא קיימת פונקציה קדומה במקרה זה, ראו נספח.

בכל אופן, למרות שיש פונקציה קדומה, אנו לא נשתמש בה כדי לחשב את האינטגרל, מהסיבה הפשוטה שמציאת פונקציה כזו היא "עסק" לא נעים (שוב, ראו נספח).

ב. נשלים את Γ למסלול סגור Γ', ע"י הוספת הקטע הממשי - $\left[-2,2\right]$:



כעת, נשים לב כי הפונק' $g\left(z\right)=\frac{2z}{z+i}$ אנליטית בתוך ועל Γ', ולכן עפ"י נוסחת קושי נקבל:

$$\int_{\Gamma'}\frac{2z}{z^2+1}dz=\int_{\Gamma'}\frac{g\left(z\right)}{z-i}dz=2\pi i\cdot g\left(i\right)=2\pi i\cdot\frac{2i}{2i}=2\pi i$$

אבל אנחנו יודעים גם ש:

$$\int_{\Gamma'}\frac{2z}{z^2+1}dz=\int_{\Gamma}\frac{2z}{z^2+1}dz+\int_{-2}^{2}\frac{2x}{x^2+1}dx$$

ולכן נקבל:

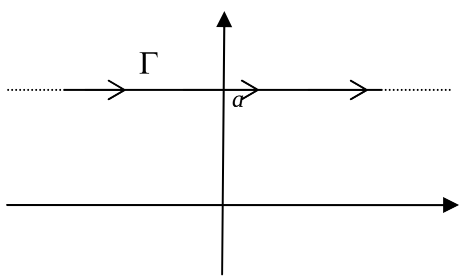
$$\boxed{I=\int_{\Gamma'}\frac{2z}{z^2+1}dz-\int_{-2}^{2}\frac{2x}{x^2+1}dx=2\pi i-\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_{-2}^{2}=2\pi i-\left(\ln 5-\ln 5\right)=2\pi i}$$

תרגיל מס' 6

תהי f פונק' אנליטית בתחום: $\left\{z\mid 0\le \operatorname{Im} z\le a, a\in\mathbb{R}\right\}$, כך שמתקיים: $\lim_{z\to\infty} f\left(z\right)=0$.

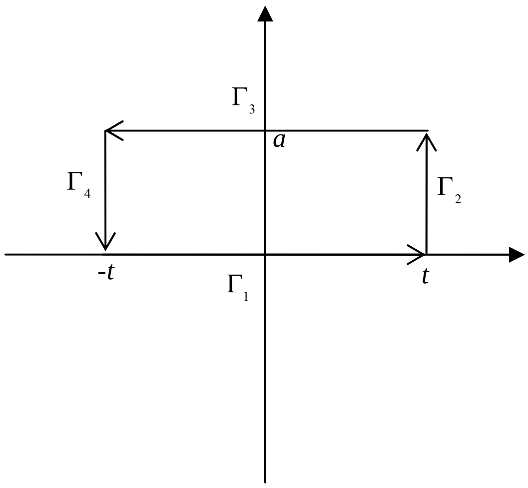
צ"ל: אם האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)dx$ מתכנס, אז $\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)dx=\int_{\Gamma} f\left(z\right)dz$, כאשר:

$\Gamma=\left\{z\mid \operatorname{Im} z=a\right\}$.



פתרון

נבנה את הקונטור הבא:



$\Gamma_t = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$, כלומר, Γ_t הוא מלבן בגובה קבוע a וברוחב משתנה - $2t$ (למעשה גם $\Gamma_{1,2,3,4}$ תלויים בפרמטר t, אבל כדי לא לסרבל יותר מדי את הסימנים, נכתוב אותם בלי t).

כעת כיוון ש-f אנליטית בתחום המכיל את Γ_t והפנים שלו, נסיק עפ"י משפט קושי-גורסה כי:

$$(*) 0 = \int_{\Gamma_t} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_3} f(z)\,dz + \int_{\Gamma_4} f(z)\,dz$$

כעת, נבחן את הגבול של ערכי האינטגרלים לאורך החלקים השונים של Γ_t, כאשר $t \to \infty$:

על Γ_1:

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-t}^{t} f(x)\,dx \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

על Γ_2:

נשתמש במשפט ההערכה, ונקבל:

$$\left|\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\right| \le a \cdot \max_{\Gamma_2} |f(z)| \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \left|\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\right| = 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = 0$$

הסבר: כש-$t \to \infty$, גם $z \to \infty$ לכל $z \in \Gamma_2$, ולפי הנתון - $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, נסיק כי גם $\max_{z\in\Gamma_2} |f(z)| \to 0$ ולכן גם גבול האינטגרל הוא 0.

על Γ_3:

נשים לב כי $\Gamma = \lim_{t\to\infty} -\Gamma_3$ (Γ_3 הוא בכיוון מנוגד ל-Γ), ולכן:

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\Gamma_3} f(z)\,dz = -\int_{\Gamma} f(z)\,dz$$

על Γ_4:

ניתן להראות בדיוק כמו שעשינו עבור Γ_2, כי: $\lim_{t\to\infty}\int_{\Gamma_4} f(z)\,dz = 0$.

כעת, נחזור לשיווין $(*)$, ונסתכל על הגבול שלו כאשר $t\to\infty$, ונקבל:

$$0=\lim_{t\to\infty}\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz+\lim_{t\to\infty}\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz+\lim_{t\to\infty}\int_{\Gamma_3} f(z)\,dz+\lim_{t\to\infty}\int_{\Gamma_4} f(z)\,dz$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx-\int_{\Gamma} f(z)dz=0$$

$$\Downarrow$$

$\int_{\Gamma} f(z)dz=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ - **מש"ל**.