פתרונות לבוחן בפונקציות מרוכבות

1. (א) בשפה של x, y הפונקציה היא

$$f(x,y) = (x+iy-1)x^2 = x^3 - x^2 + ix^2y$$

כלומר

$$u(x,y) = x^3 - x^2, \quad v(x,y) = x^2y$$

כמובן ששתיהן דיפרנציאביליות ולכן הפונקציה גזירה איפה שמשוואות קושי רימן מתקיימות. כלומר

$$u'_x = v'_y \quad u'_y = -v'_x$$

$$3x^2 - 2x = x^2 \quad 0 = -2xy$$

קל לראות שאם $x = 0$ שתי המשוואות מתקיימות. האופציה השניה היא $x = 1$ ו $y = 0$. כלומר הנקודות בהן הפונקציה גזירה הן:

$$\{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(1,0)\}$$

לאף אחת מהנקודות האלה אין סביבה שבה הפונקציה גזירה ולכן הפונקציה לא אנליטית באף נקודה.

(ב) אם נניח

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$f(\bar{z}) = \tilde{u}(x,y) + i\tilde{v}(x,y)$$

אז

$$\tilde{u}(x,y) = u(x,-y), \quad \tilde{v}(x,y) = v(x,-y)$$

אם שתיהן אנליטיות, שתיהן מקיימות את משוואות קושי רימן, כלומר:

$$u'_x = v'_y \quad u'_y = -v'_x$$

$$\tilde{u}'_x = \tilde{v}'_y \quad \tilde{u}'_y = -\tilde{v}'_x$$

אבל לפי כלל השרשרת השורה השניה היא בעצם

$$u'_x = -v'_y \quad -u'_y = -v'_x$$

ועכשיו פתרון המשוואות יביא אותנו למסקנה שכל הנגזרות החלקיות מתאפסות. היות שתחום ההגדרה של הפונקציה הוא $\mathbb{C}$(פתוח וקשיר לכל הדעות), זה אומר שהפונקציה $f(z)$ היא קבועה.
מצד שני בוודאי שכל פונקציה קבועה תקיים ש $f(z)$ ו $f(\bar{z})$ אנליטיות, ולכן הפתרון הוא שאלה בדיוק הפונקציות הקבועות.

2. (א)

$$\sin z\cos w=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}=\frac{1}{4i}(e^{i(z+w)}+e^{i(z-w)}-e^{-i(z-w)}-e^{-i(z+w)})=$$
$$=\frac{1}{2}(\frac{e^{i(z+w)}-e^{-i(z+w)}}{2}+\frac{e^{i(z-w)}-e^{-i(z-w)}}{2})=\frac{\sin(z+w)+\sin(z-w)}{2}$$

(ב) הפרכה: אפשר לקחת אותה דוגמא כמו בתרגילי הבית $f(z)=z$ ו $\gamma(t)=it$ עבור $0\le t\le 1$.

$$\overline{\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z}=\overline{\int_0^1 it\cdot i\mathrm{d}t}=\overline{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

$$\int_\gamma \overline{f(z)}\mathrm{d}z=\int_0^1 \overline{it}\cdot i\mathrm{d}t=-\int_0^1 it\cdot i\mathrm{d}t=\frac{1}{2}$$

3. קודם ננסה להבין מהו הענף המדובר. תמיד מתקיים

$$z^{\frac{1}{4}}=e^{\frac{1}{4}\log z}=e^{\frac{1}{4}(\ln|z|+i\arg(z)+2\pi k)}$$

והיות ש $|z|=1$ (כי אנחנו חיים על Γ) בעצם

$$z^{\frac{1}{4}}=e^{\frac{i}{4}\arg(z)+\frac{\pi}{2}ki}$$

כאשר $k\in\{0,1,2,3\}$ (אח"כ זה כבר חוזר על עצמו) ונניח $\arg(z)\in[0,\pi]$. היות ש $z^{\frac{1}{4}}$ רציף, אנחנו יודעים שזה אותו ערך k לכל $z\in\Gamma$. (שזאת אמירה לא מוסברת ב 100% אבל אפשר להסתפק בזה) היות ש $\sqrt[4]{1}=1$ אנחנו יודעים ש

$$e^{\frac{i}{4}\arg(1)+\frac{\pi}{2}ki}=1$$

כלומר

$$e^{\frac{\pi}{2}ki}=e^0$$

ולכן $k=0$. כלומר הפונקציה המדוברת היא

$$e^{\frac{i}{4}\arg(z)}$$

עכשיו אפשר לחשב את האינטגרל. המסילה היא בעצם

$$\Gamma(t)=e^{it}\quad 0\le t\le\pi$$

ולכן החישוב הוא

$$\int_\Gamma \frac{1}{\sqrt[4]{z}}\mathrm{d}z = \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt[4]{e^{it}}} ie^{it}\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{1}{e^{\frac{it}{4}}} ie^{it}\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^\pi \frac{1}{e^{\frac{it}{4}}} ie^{it}\mathrm{d}t = i\int_0^\pi e^{\frac{3}{4}it}\mathrm{d}t = \left.\frac{4}{3}e^{\frac{3}{4}it}\right|_0^\pi$$
$$= \frac{4}{3}(e^{\frac{3}{4}i\pi} - 1)$$

4. (א) בכתיב x, y המשוואההיא בעצם

$$x^2 + y^2 - 2(x+iy) - 4 + 2i = 0$$

נפצל לחלק ממשי ומדומה

$$x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0 \quad -2y + 2 = 0$$

מהחלק המדומה ברור כי

$$y = 1$$

נציב בחלק המדומה ונקבל

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

את זה קל לפתור ולקבל

$$x = -1, 3$$

כלומר הפתרונות הם:

$$-1+i, \quad 3+i$$

(ב) נשים לב ש $\bar{z}+z^2$ לא אנליטית אז אי אפשר להשתמש מייד בנוסחת קושי. אבל בתחום שלנו $\bar{z} = \frac{4}{z}$ ולכן

$$\int_{|z|=2} \frac{\bar{z}+z^2}{(z+1)}\mathrm{d}z = \int_{|z|=2} \frac{\frac{4}{z}+z^2}{(z+1)}\mathrm{d}z = \int_{|z|=2} \frac{4+z^3}{z(z+1)}\mathrm{d}z$$

נבצע חילוק פולינומים ונגלה ש

$$\frac{z^3+4}{z(z+1)} = \frac{z+4}{z(z+1)} + z - 1$$

כלומר האינטגרל הוא

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z+4}{z(z+1)}\mathrm{d}z + \int\limits_{|z|=2} z-1\mathrm{d}z$$

החלק הימני אנליטי ולכן מתאפס על מסילה סגורה. נותרנו עם החלק השמאלי. נפצל לשברים חלקיים

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{z+4}{z(z+1)}\mathrm{d}z = \int\limits_{|z|=2} \frac{4}{z}\mathrm{d}z - \int\limits_{|z|=2} \frac{3}{z+1}\mathrm{d}z$$

שאת אלה קל לחשב לפי קושי. מתקבל:

$$4 \cdot 2\pi i - 3 \cdot 2\pi i = 2\pi i$$