

מבחן סיום בקורס מבוא לאלגברה לינארית 89-119 מועד ב'

סמסטר א' תשע"ח

מרצה: איתמר שטיין

מתרגל: אחמד סלימאן.

תאריך: כ"א אדר תשע"ח 8.3.18

משך המבחן: שלוש שעות.

הוראות: יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. אם עניתם על 5 שאלות, יש לסמן באופן ברור 4

שאלות שאתם רוצים שתבדקנה. אחרת 4 השאלות הראשונות תבדקנה.

כל שאלה שווה 25 נקודות.

חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון מדעי פשוט בלבד.

**יש לנמק היטב את תשובותיכם!**

1. נתונה מערכת משוואות התלויה בפרמטרים  $a, b$ .

$$x + 2y - z = 1$$

$$-x - y + 3z = 1$$

$$x + (a + 1)y + az = b$$

עבור אילו ערכים של  $a, b$  למערכת יש פתרון יחיד? אין פתרון? או אינסוף פתרונות?  
עבור מצבים של אינסוף פתרונות מצאו גם פתרון כללי.

2. (א) תהיינה 3 מטריצות הפיכות  $A, B, C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ . נתון כי  $|B| = -3$ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

וכן נתון כי

$$C^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} B^{-1}C = A$$

i. (9 נק') מצאו את  $a$ .

ii. (9 נק') חשבו את  $A^{-1}$ .

(ב) (7 נק') מצאו מטריצות אלמנטריות  $E_1, E_2$  כך ש

$$E_2 E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (א) נתונים ארבעה וקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ a \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ a-2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

התלויים בפרמטר  $a$ .

i. (10 נק') עבור אילו ערכי  $a$  הוקטורים פורשים את  $\mathbb{R}^3$ ?

ii. (5 נק') מצאו את ההטלה של הוקטור  $v_1$  על הוקטור  $v_2$ .

(ב) (10 נק') הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: לכל שלושה וקטורים  $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^n$

מתקיים:

$$u_1 + u_2 + u_3 \in \text{span} \{u_1 - u_2, u_2 - u_3, u_2 + 2u_3\}$$

נמקו.

4. (א) (15 נק') נתונה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & -11 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

מצאו בסיסים עבור המרחבים  $C(A)$ ,  $R(A)$ ,  $N(A)$  ומצאו את  $\text{rank } A$ .

(ב) (10 נק') תהי מטריצה  $B \in \mathbb{R}^{5 \times 8}$ . הסבירו מדוע לא ייתכן כי  $\dim N(B) = 2$ .

5. נתונה מטריצה  $3 \times 3$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

(א) (9 נק') הוכיחו כי  $A$  לכסינה.

(ב) (8 נק') מצאו מטריצה אלכסונית  $D$  ומטריצה הפיכה  $P$  כך ש  $P^{-1}AP = D$ . (אין צורך לחשב את  $P^{-1}$ )

(ג) (8 נק') האם המטריצה

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

דומה ל  $A$ ? נמקו.

**נוסחאות:**

• אורך:  $\|u\| = \sqrt{u \bullet u}$

• מרחק:  $d(u, v) = \|u - v\|$

• זווית:  $\cos \alpha = \frac{u \bullet v}{\|u\| \|v\|}$

• הטלה:  $\pi_v(u) = \frac{u \bullet v}{v \bullet v} v$