

תרגיל בית 7 אינפי 3

1. מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן (מקסימום/מינימום/אוכף) עבור הפונקציות הבאות (בכל תחום ההגדרה)

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 6y^2 \quad (\text{א})$$

$$f(x, y) = (x - 1)^2 - 2y^2 \quad (\text{ב})$$

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 \quad (\text{ג})$$

$$f(x, y) = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (a, b > 0) \quad (\text{ד}) \text{ (רשות-אין צורך להגיש)}$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)} \quad (\text{ה})$$

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2a^2(x^2 + y^2 + z^2) \quad (a > 0) \quad (\text{ו})$$

2. תהי

$$f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$$

(א) הוכיחו כי $(0, 0)$ היא נקודה קריטית.

(ב) הוכיחו כי ל f יש מינימום מקומי לאורך כל קו ישר העובר דרך הראשית. כלומר, אם נגדיר $g(t) = (at, bt)$ עבור $a, b \in \mathbb{R}$ יתקיים כי ל $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ יש מינימום מקומי ב $t = 0$.

(ג) הוכיחו כי $(0, 0)$ אינה מינימום מקומי של f .

3. הוכיחו כי המשוואות הבאות מגדירות את z כפונקציה של x, y בסביבת הנקודה

$$a = (a_1, a_2, a_3) \text{ וחשב את } z_x(a_1, a_2), z_y(a_1, a_2), z_{xy}(a_1, a_2).$$

(א)

$$F(x, y, z) = y^2 + xy + z^2 - e^z - 4 = 0$$

$$a = (0, e, 2)$$

(ב)

$$xz + y \ln z + x^2 = 0$$

$$a = (-2, 0, 2)$$

$$.4 \text{ נתונה משוואה } \sqrt{x^2 + y^5 + \cos z - 1} = z^4 + 1$$

(א) האם המשוואה מגדירה בסביבת $(-1, 0, 0)$ את x כפונקציה של y, z ?

(ב) האם המשוואה מגדירה בסביבת $(-1, 0, 0)$ את y כפונקציה של x, z ?

(ג) האם המשוואה מגדירה בסביבת $(-1, 0, 0)$ את z כפונקציה של x, y ?

.5 נניח כי המשוואה $F(x, y, z) = 0$ מקיימת את תנאי הפונקציה הסתומה לפי כל אחד

מן המשתנים בנקודה $a = (a_1, a_2, a_3)$ ולכן מגדירה פונקציות

$$x = x(y, z), \quad y = y(x, z), \quad z = z(x, y)$$

מצאו את (המספר)

$$\frac{\partial x}{\partial y}(a_2, a_3) \cdot \frac{\partial y}{\partial z}(a_1, a_3) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(a_1, a_2)$$

.6 (א) הוכיחו כי קיים כדור כלשהוא $B \subseteq \mathbb{R}^4$ שמרכזו ב $(2, 1, -1, -2)$ וקיימות

פונקציות $u, v : B \rightarrow \mathbb{R}$ הגזירות ברציפות על B . כך ש

$$u(2, 1, -1, -2) = 4, \quad v(2, 1, -1, -2) = 3$$

ולכל נקודה $(x, y, z, w) \in B$ מתקיים

$$u^2 + v^2 + w^2 = 29, \quad \frac{u^2}{x^2} + \frac{v^2}{y^2} + \frac{w^2}{z^2} = 17$$

(ב) מצאו את

$$u_x(2, 1, -1, -2), \quad v_x(2, 1, -1, -2), \quad u_z(2, 1, -1, -2), \quad v_z(2, 1, -1, -2)$$

7. תהי

$$f(x, y, z) = (e^x \sin z, e^y \cos z, e^z xy)$$

הוכח כי f הפיכה מקומית ב $(0, 1, 0)$ ומצא את מטריצת יעקובי של f^{-1} בנקודה $(0, e, 0)$.