גיאומטריה אקסיומטית- פתרון תרגיל 2

תרגיל 1

נתון $A * B * C$ הוכיחו כי B הנקודה היחידה המשותפת לקרניים $\overrightarrow{BA}$ ו-$\overrightarrow{BC}$.

פתרון 1:

נניח בשלילה שיש עוד נקודה משותפת $D \neq B$ בחיתוך של $\overrightarrow{BA}$ ו-$\overrightarrow{BC}$, $D \in \overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC}$.

נתון $A * B * C$ לכן A לא נמצאת על הקרן $\overrightarrow{BC}$ ז"א $D \neq A$.

C לא נמצאת על הקרן $\overrightarrow{BA}$ לכן $D \neq C$. כלומר $D \neq A, B, C$ לפי ההנחה.

$D \in \overrightarrow{BA}$ לכן לפי הגדרת הקרן מתקיים:

א) $B * D * A$ או ב) $B * A * D$

<u>מקרה א'</u>: אם $B * A * D$:

אז מתקיים לפי אקסיומה $B - 1$ $D * A * B$ ובנוסף נתון $A * B * C$,

לכן לפי משפט תוצאה למשפט $B - 3$, נקבל ש-$D * A * C$ ו- $D * B * C$.

$D * B * C \Leftarrow D \notin \overrightarrow{BC}$.

קיבלנו סתירה.

<u>מקרה ב'</u>: אם $B * D * A \Leftrightarrow A * D * B$ (שקול) ביחד עם $A * B * C$

ולפי משפט $B - 3$ נקבל $D * B * C \Leftarrow D \notin \overrightarrow{BC}$ סתירה.

מספיק עד כאן בכדי להוכיח שD לא משותפת והנקודה היחידה היא B.

תרגיל 2

נתון $A * B * C$ הראו כי $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

הערה: יש לבדוק את כל המקרים בהגדרת הקרן ולהראות את ההכלה הדו כיוונית.

פתרון 2

נוכיח כעת כי $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

נוכיח הכלה דו כיוונית.

<u>כיוון ראשון</u>: $\overrightarrow{AB} \subseteq \overrightarrow{AC}$.

ניקח נקודה כלשהי P על $\overrightarrow{AB}$.

- אם $P = A$ אז $P \in \overrightarrow{AC}$ וסיימנו.
- אם $P = B$ ונתון ש-$A * B * C$ אז $P \in \overrightarrow{AC}$ כי P נמצאת על הקטע AC והקרן $\overrightarrow{AC}$ היא הקטע איחוד עוד משהו.

כעת $A \neq P \neq B$ ו-P על $\overrightarrow{AB}$, אז מתקיים או $B * P * A$ או $A * B * P$.

אם $A*P*B$: ונתון $A*B*C$ לפי משפט $B-3$ מתקים $A*P*C$
$\Leftarrow P\in\overrightarrow{AC}$.
זאת.
אם $A*B*P$ ונתון $A*B*C$
לא יודעים אם P לפני B אז אין אפשרות להשתמש ביחסים האלו כי B במקום השני בשני היחסים וראינו שהוא צריך להיות במקום השני ביחס אחד וביחס השני במקום השלישי בכדי להשתמש במשפט $B-3$ או בתוצאה שלו.
לכן, רוצים להוכיח כי $P\in\overrightarrow{AC}$.
נניח בשלילה ש-$P\notin\overrightarrow{AC}$ ז"א שמתקים:
$(*)$ $P*A*C$ יחד עם $(**)$ $A*B*P$ $\Leftarrow$ לפי אקסיומה $B-1$ זה שקול ל-$P*B*A$.
עשינו זאת בכדי לקבל P ראשונה בשני היחסים, באמת רואים ש A ביחס אחד במקום השני וביחס השני במקום השלישי ולכן נשתמש במשפט $B-3$ עבור היחסים $(*)+(**)$.
לכן מתקים $C*A*B$ וזה בסתירה לנתון ש- $A*B*C \Leftarrow P\in\overrightarrow{AC}$.
ובכך הוכחנו כי $\overrightarrow{AB}\subseteq\overrightarrow{AC}$ וטיפלנו בכל המקרים.

<u>כיוון שני:</u> $\overrightarrow{AB}\subseteq\overrightarrow{AC}$ – אותה הוכחה בדיוק כמו הכיוון הראשון.
ניקח נקודה כלשהי P על $\overrightarrow{AC}$.

- אם $P=A$ אז $P\in\overrightarrow{AB}$ וסימנו.
- אם $P=C$ ונתון ש-$A*B*C$ אז $P\in\overrightarrow{AB}$ לפי הגדרת קרן.

כעת $P\neq A,C$ ו-P נקודה על $\overrightarrow{AC}$, לכן יתכנו האפשרויות הבאות $A*P*C$ או $A*C*P$ – נבדוק את שני המקרים.
אם $A*C*P$: ונתון $A*B*C$ נקבל לפי משפט $B-3$ $A*B*P$ כלומר $P\in\overrightarrow{AB}$.
אם $A*P*C$ ונתון $A*B*C$
לא יודעים אם P לפני B לכן אין אפשרות להשתמש במשפט $B-3$.
נניח בשלילה ש-$P\notin\overrightarrow{AB}$ כלומר מתקים $P*A*B$ ונתון $A*P*C \Leftarrow$ לפי תוצאה למשפט $B-3$ נקבל ש-$B*A*C$ וזה בסתירה לנתון כי $A*B*C \Leftarrow P\in\overrightarrow{AB}$.
ובכך הוכחנו כי $\overrightarrow{AC}\subseteq\overrightarrow{AB}$.
בסה"כ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$.

<u>תרגיל 3</u>

אם D נקודה בפנים $\sphericalangle CAB$, אז כל נקודה אחרת על הקרן $\overrightarrow{AD}$, פרט לנקודה A נמצאת בפנים $\sphericalangle CAB$.

<u>פתרון 3</u>

נשתמש בלמה שהוכחתם בתרגיל 1 שאלה 3.
בהנתן ישר ℓ, A נקודה על ℓ ונקודה B לא על ℓ, אז כל נקודה של הקרן $\overrightarrow{AB}$ פרט ל-A היא באותו צד של ℓ כמו B, ז"א לא חותכת את ℓ.
לפי הנתון D בפנים של $\sphericalangle CAB$, כלומר:

1) D באותו צד של $\overleftrightarrow{AC}$ כמו B
2) D באותו צד של $\overleftrightarrow{AB}$ כמו C

3) A נקודה על $\overleftrightarrow{AC}$ ו-D לא עליו לכן לפי הלמה כל הנקודות על הקרן $\overrightarrow{AD}$ פרט לנקודה A הן באותו צד של $\overleftrightarrow{AC}$ כמו D.

לפי 1) + 3) כל הנקודות על הקרן $\overrightarrow{AD}$ פרט ל- A הן באותו צד של $\overleftrightarrow{AC}$ כמו B. - לפי אקסיומה $B-4$ (1).

נוכיח אותו דבר עבור $\overleftrightarrow{AB}$.

A נקודה על $\overleftrightarrow{AB}$ ו-D לא עליו לכן לפי הלמה כל הנקודות על הקרן $\overrightarrow{AD}$ פרט לנקודה A הן באותו צד של $\overleftrightarrow{AB}$ כמו D.

לפי 2) D באותו צד של $\overleftrightarrow{AB}$ כמו C.

לכן לפי $B-4$ (1) כל הנקודות על הקרן $\overrightarrow{AD}$ פרט לנקודה A הן באותו צד של $\overleftrightarrow{AB}$ כמו C.

ולפי הגדרה של פנים $\sphericalangle CAB$ אכן מתקים שכל הנקודות על הקרן $\overrightarrow{AD}$ פרט ל- A נמצאות בפנים $\sphericalangle CAB$.