88-236 חשבון אינפיניטיסימלי 4

פתרון תרגיל בית 3

1. נתון השדה $\vec{F}(x,y)=(xy,y)$ ויהי γ מעגל יחידה במגמה חיובית. חשבו $\int_\gamma \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds$, $\hat{n}$ נורמל יחידה חיצוני למשטח.

פתרון:

באופן כללי עבור $\vec{F}=(P,Q)$ ומסילה סגורה $\gamma(t)$, $t_0\le t\le t_1$, אנו יודעים כי המשיק למסילה בכל נקודה היא $\gamma'(t)=\left(\gamma_1'(t),\gamma_2'(t)\right)$ ולכן שני נורמלי היחידה למסילה הם:

$\pm\frac{1}{\left\|\gamma'(t)\right\|}\left(\gamma_2'(t),-\gamma_1'(t)\right)$. בהנחה שהמסילה במגמה חיובית מקבלים

$\hat{n}=\frac{1}{\left\|\gamma'(t)\right\|}\left(\gamma_2'(t),-\gamma_1'(t)\right)$. לכן:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds=\int_{t_0}^{t_1}\left(P(\gamma(t)),Q(\gamma(t))\right)\cdot\frac{1}{\left\|\gamma'(t)\right\|}\left(\gamma_2'(t),-\gamma_1'(t)\right)\left\|\gamma'(t)\right\|dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left(P(\gamma(t))\cdot\gamma_2'(t)-Q(\gamma(t))\cdot\gamma_1'(t)\right)dt=\int_\gamma Pdy-Qdx$$

לכן, במקרה שלנו, כאשר $\gamma=(\cos t,\sin t)$:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds=\int_\gamma xy\,dy-y\,dx=\int_0^{2\pi}\left(\sin t\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt=$$

$$=-\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,d(\cos t)+\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos(2t)}{2}dt=0+\pi=\pi$$

2.

א. עבור איזו מסילה פשוטה סגורה בעלת אורך ובעלת כיוון חיובי ב- $\mathbb{R}^2$, ערך האינטגרל הקווי $\int_C \left(e^{x^2}-(x+2y)^3\right)dx+\left(e^{y^2}-12x(xy+4)\right)dy$ יהיה מינימאלי? מצאו את נוסחת המסילה.

ב. יהי $\int_C \left(-e^{y^3}-(x+2y)^3\right)dx+\left(e^{x^3}+12x(4-xy)\right)dy=0$. האם ייתכן ש- C מסילה פשוטה סגורה בעלת אורך ובעלת כיוון חיובי ב- $\mathbb{R}^2$? אם כן, מצאו דוגמא למסילה כזאת.

פתרון:

א. שימו לב כי כיוון שהמסילה מתאימה לתנאי של משפט גרין:

$$\int_C \left(e^{x^2}-(x+2y)^3\right)dx+\left(e^{y^2}-12x(xy+4)\right)dy=\iint_D \left(6x^2+24y^2-48\right)dA=$$

$$=48\iint_D \left(\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}-1\right)dA$$

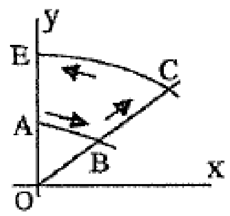
כאשר D הוא תחום ש"כלוא" בתוך המסילה. נשים לב שהאינטגרנד יהיה שלילי בתוך אליפסה עם רדיוסים $R_x=\sqrt{8},\ R_y=\sqrt{2}$ סביב ראשית הצירים, וחיובי מחוצה לה.לכן ברור כי הערך האינטגרל הקווי יהיה מינימאלי כאשר מסילה C תהיה אליפסה של $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$

ב. אילו המסילה הייתה עונה לתנאי משפט גרין אז היינו מקבלים:

$$\int_C \left(-e^{y^3}-(x+2y)^3\right)dx+\left(e^{x^3}+12x(4-xy)\right)dy=0=$$

$$=\iint_D \left(3x^2e^{x^3}+3y^2e^{y^3}+6x^2+24y^2+48\right)dA$$

אך התחום D הינו תחום עם פנים לא ריק והאינטגרנד הינו פונקציה חיובית ממש על כל תחום לא ריק. לכן לא ייתכן ש- $\iint_D \left(3x^2e^{x^3}+3y^2e^{y^3}+6x^2+24y^2+48\right)dA=0$ ולכן לא ייתכן שקיימת מסילה C העונה לתנאי משפט גרין.



3. חשבו עבודת הכוח $\hat{j}$ $\vec{F}=\left(x^2\sin x-2y^2\right)\hat{i}+\left(x^2+\cos\dfrac{\pi y}{2}\right)$ לאורך

מסלול הבא: הקשת AB של האליפסה $x^2+2y^2=2$, קטע BC של

הישר $y=x$ והקשת CE של האליפסה $x^2+2y^2=8$.

פתרון:

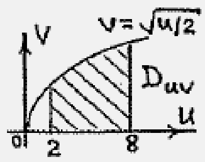
נסמן את המסלול הנתון ב- C. מטרתנו לחשב את $I=\int\limits_C \vec{F}d\vec{r}$. כדי להשתמש במשפט גרין, נסגור את המסלול על ידי קטע EA ($x=0$). נסמן את המסלול הסגור ב- L. קיבלנו:

$$J=\int\limits_L \vec{F}d\vec{r}=I+\int\limits_{EA}\vec{F}d\vec{r}\ .$$

$$J=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\iint\limits_D(2x+4y)\,dxdy\ .$$

נעשה החלפת משתנים:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+2y^2=2,\ \ x^2+2y^2=8 \\ y-x=v \\ x=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} u=x^2+2y^2,\ \ 2\le u\le 8 \\ v=y-x,\ \ v=0 \\ v=\sqrt{u/2} \end{array}\right\},$$



$$\frac{1}{J}=\begin{vmatrix} u'_x & v'_x \\ u'_y & v'_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x & -1 \\ 4y & 1 \end{vmatrix}=2x+4y\ \Rightarrow\ J=\frac{1}{2(x+2y)}$$

$$J=\iint\limits_{D_{uv}}(2x+4y)\frac{1}{2(x+2y)}dudv=\iint\limits_{D_{uv}}dudv=\int\limits_2^8\sqrt{u/2}\ du=\frac{28}{3}$$

נותר למצוא את $\int\limits_{EA}\vec{F}d\vec{r}$:

$$\int\limits_{EA}\vec{F}d\vec{r}=\int\limits_{EA}\left(x^2\sin x-2y^2\right)dx+\left(x^2+\cos\frac{\pi y}{2}\right)dy\underset{\left[\begin{smallmatrix}x=0\\dx=0\end{smallmatrix}\right]}{=}\int\limits_2^1\cos\frac{\pi y}{2}dy=\frac{2}{\pi}$$

ולבסוף, $I=J-\int\limits_{EA}\vec{F}d\vec{r}=\dfrac{28}{3}-\dfrac{2}{\pi}$

4. קבעו האם F הוא שדה משמר. אם כן, מצאו פונקציה f כך ש- $\nabla f = F$.

א. $F(x,y)=\left((6x+5y),(5x+4y)\right)$.

ב. $F(x,y)=\left(xe^{y},ye^{x}\right)$.

ג. $F(x,y)=\left((2x\cos y-y\cos x),(-x^2\sin y-\sin x)\right)$.

פתרון:

א.

$$F(x,y)=\left((6x+5y),(5x+4y)\right)$$

$$\left.\begin{aligned} P=6x+5y &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=5 \\ Q=5x+4y &\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

ולכן F הוא שדה משמר. כלומר קיימת פונקציה f כך ש- $\nabla f = F$, ולכן:

$$f_x=6x+5y$$
$$f_y=5x+4y$$

נבצע אינטגרציה לפי x ונקבל: $f(x,y)=\int f_x dx=\int(6x+5y)dx=3x^2+5xy+g(y)$

נגזור לפי y ונשווה ל- f_y : $5x+g'(y)=5x+4y\Rightarrow g'(y)=4y\Rightarrow g(y)=2y^2+K$

ולכן הפוטנציאל יהיה: $f(x,y)=3x^2+5xy+2y^2+K$

ב.

$$F(x,y)=\left(xe^{y},ye^{x}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} P=xe^{y} &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=xe^{y} \\ Q=ye^{x} &\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=ye^{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$$

כלומר F אינו שדה משמר.

ג.

$$F(x,y)=\left((2x\cos y-y\cos x),(-x^2\sin y-\sin x)\right)$$

$$\left.\begin{aligned} P=2x\cos y-y\cos x &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin y-\cos x \\ Q=-x^2\sin y-\sin x &\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=-2x\sin y-\cos x \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

ולכן F הוא שדה משמר. כלומר קיימת פונקציה f כך ש- $\nabla f = F$, ולכן:

$$f_x=2x\cos y-y\cos x$$
$$f_y=-x^2\sin y-\sin x$$

נבצע אינטגרציה לפי x ונקבל:

$$f(x,y)=\int f_x dx=\int(2x\cos y-y\cos x)dx=x^2\cos y-y\sin x+g(y)$$

נגזור לפי y ונשווה ל- f_y :

$$-x^2\sin y-\sin x+g'(y)=-x^2\sin y-\sin x\Rightarrow g'(y)=0\Rightarrow g(y)=K$$

ולכן הפוטנציאל יהיה: $f(x,y)=x^2\cos y-y\sin x+K$.

5. חשבו

א. $\int_C \left(e^y - \tan\frac{x}{2}\right)dx + \left(xe^y + y\cos y^2\right)dy$ כאשר C הוא האיחוד של העקומים $y = 8 - x^2, \quad y = x^2$ ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

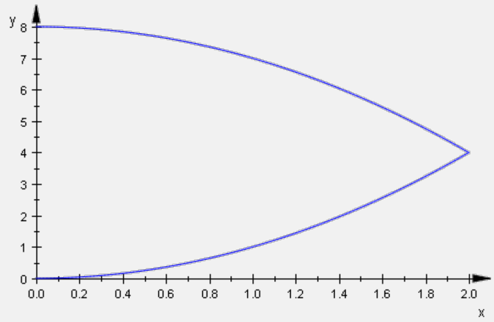
ב. $\int_C -2e^{2x-y}\cos y dx + \left(e^{2x-y}\left(\sin y + \cos y\right) + 2xy\right)dy$ כאשר C הוא חצי האליפסה $\left\{\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \ y \ge 0\right\}$ מהנקודה $(2,0)$ לנקודה $(-2,0)$.

פתרון:

א. נמצא נקודת חיתוך של הפרבולות:

$$\begin{cases} y = 8 - x^2 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2$$

ולכן נקודות החיתוך הן $(2,4), (-2,4)$, אבל היות והעקום הוא ברביע הראשון החיתוך הרלוונטי הוא בנקודה $(2,4)$. נקבל את העקום הבא:



על מנת להשתמש במשפט גרין נסגור את העקום באמצעות הקו $x = 0$. העקום החדש יהיה C'. נחשב:

$$\begin{cases} P = e^y - \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = e^y \\ Q = xe^y + y\cos y^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = e^y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

כלומר קיבלנו שדה משמר, ולכן:

$$\int_{C'} \left(e^y - \tan\frac{x}{2}\right)dx + \left(xe^y + y\cos y^2\right)dy = \iint_D (e^y - e^y) = 0$$

נותר להפחית את הקו שהוספנו. היות ו-C היה עם כיוון השעון, כלומר בכיוון השלילי, אנחנו צריכים להוסיף את הקו $x = 0$. לכן $dx = 0$, ונקבל:

$$\int_0^8 y\cos y^2 dy = \begin{bmatrix} u = y^2 \\ du = 2ydy \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\int_0^{64}\cos u du = \frac{1}{2}\left(\sin 64 - \sin 0\right) = \frac{1}{2}\sin 64$$

ולכן הפתרון הסופי יהיה:

$$\int_C \left(e^y - \tan\frac{x}{2}\right)dx + \left(xe^y + y\cos y^2\right)dy = \frac{1}{2}\sin 64.$$

ב. העקום הנתון הוא עקום פתוח נגד כיוון השעון, כלומר בכיוון החיובי. על מנת להשתמש במשפט גרין, נסגור את העקום על ידי הוספה של הקו $y=0$, ובסוף נחסר את מה שהוספנו. העקום החדש יהיה C'.

נחשב:

$$\begin{cases} P=-2e^{2x-y}\cos y \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=2e^{2x-y}\cos y+2e^{2x-y}\sin y \\ Q=e^{2x-y}\left(\sin y+\cos y\right)+2xy \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2e^{2x-y}\left(\sin y+\cos y\right)+2y \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}\neq\frac{\partial Q}{\partial x}$$

כלומר קיבלנו שדה שאינו משמר, אבל עדיין ניתן להשתמש במשפט גרין:

$$\int_{C'} -2e^{2x-y}\cos y dx+\left(e^{2x-y}\left(\sin y+\cos y\right)+2xy\right)dy=$$

$$=\iint_D \left(2e^{2x-y}\left(\sin y+\cos y\right)+2y-2e^{2x-y}\left(\sin y+\cos y\right)\right)dA=2\iint_D ydA$$

נמצא מהו התחום D:

$$D=\left\{(x,y)\middle| -2\le x\le 2,\quad 0\le y\le\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\right\}$$

ולכן:

$$2\iint_D ydA=2\int_{-2}^{2}\int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} ydydx=\int_{-2}^{2}\left(y^2\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\right)dx=\int_{-2}^{2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left(x-\frac{x^3}{12}\Big|_{x=-2}^{x=2}\right)=2\frac{2}{3}$$

כעת נפחית את הקו שהוספנו: $y=0\Rightarrow dy=0$ ונקבל:

$$\int_{-2}^{2}-2e^{2x}\cos 0dx=-2\int_{-2}^{2}e^{2x}dx=-2\left(e^{2x}\Big|_{x=-2}^{x=2}\right)=-2\left(e^4-\frac{1}{e^4}\right)$$

ולכן נקבל בסך הכל:

$$\int_C -2e^{2x-y}\cos y dx+\left(e^{2x-y}\left(\sin y+\cos y\right)+2xy\right)dy=2\frac{2}{3}+2\left(e^4-\frac{1}{e^4}\right)$$

.6

א. הוכיחו שהאינטגרל הקווי $\int_{(1,0)}^{(2,1)}\left(2xy-y^4+3\right)dx+(x^2-4xy^3)dy$ הוא בלתי תלוי במסלול, וחשבו אותו.

ב. מצאו את השטח שמוגבל ע"י $\left\{x=a\cos^3 t,\quad y=a\sin^3 t\right\}$

פתרון:

א. נראה שזהו אינטגרל של שדה משמר.

$$\begin{cases} P=2xy-y^4+3\Rightarrow\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x-4y^3 \\ Q=x^2-4xy^3\Rightarrow\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x-4y^3\end{cases}\Rightarrow\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

ולכן F הוא שדה משמר. כלומר קיימת פונקציה f כך ש- $\nabla F=f$, ולכן:

$$f_x=2xy-y^4+3$$
$$f_y=x^2-4xy^3$$

נבצע אינטגרציה לפי x ונקבל:

$$f(x,y,z)=\int f_x dx=\int\left(2xy-y^4+3\right)dx=x^2y-y^4x+3x+g(y)$$

נגזור לפי y ונשווה ל- f_y :

$$x^2-4y^3x+g'(y)=x^2-4xy^3\Rightarrow g'(y)=0\Rightarrow g(y)=K$$

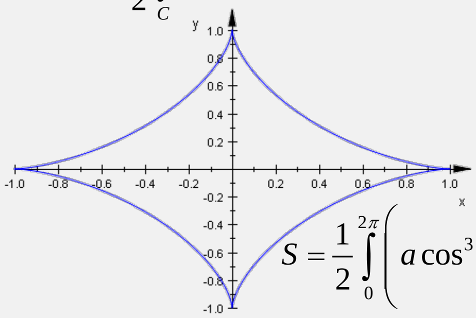
ולכן הפוטנציאל יהיה:

$$f(x,y)=x^2y-y^4x+3x+K$$

ראינו שכאשר F הוא שדה משמר, האינטגרל הקווי אינו תלוי במסלול אלא רק בנקודת ההתחלה והסוף. ולכן נבחר $K=0$, ונחשב את האינטגרל הקווי על פי המשפט היסודי:

$$\int_{(1,0)}^{(2,1)}\left(2xy-y^4+3\right)dx+(x^2-4xy^3)dy=f(2,1)-f(1,0)=$$
$$=2^2\cdot 1-1^4\cdot 2+3\cdot 2-1^2\cdot 0+0^4\cdot 1-3\cdot 1=5$$

ב. נשתמש באינטגרל קווי כדי למצוא את השטח. נשתמש בנוסחא: $S=\dfrac{1}{2}\oint\limits_C xdy-ydx$



בצורה פרמטרית הנוסחא תראה:

$$S=\frac{1}{2}\oint\limits_C\left(x(t)\frac{dy}{dt}-y(t)\frac{dx}{dt}\right)dt\ .$$

נציב את פרמטריזציה ונקבל:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a\cos^3 t\frac{d\left(a\sin^3 t\right)}{dt}-a\sin^3 t\frac{d\left(a\cos^3 t\right)}{dt}\right)dt=$$
$$=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t\right)dt=\frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}4\sin^2 t\cos^2 tdt=$$
$$=\frac{3a^2}{8}\int_0^{2\pi}\left(\sin 2t\right)^2 dt=\frac{3a^2}{16}\int_0^{2\pi}\left(1-\cos 4t\right)dt=\frac{3a^2\pi}{8}$$

7. נסמן $Q=\frac{x}{x^2+(y-1)^2}+\frac{y+2}{x^2+(y+2)^2}$, $P=\frac{1-y}{x^2+(y-1)^2}+\frac{x}{x^2+(y+2)^2}$,
$D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,1),(0,-2)\}$, $K_1=\{(t,1)\,|\,t<0\}$, $K_2=\{(t,-2)\,|\,t>0\}$. הוכיחו כי (P,Q) שדה משמר באחד מבין שני התחומים $D\setminus K_1$ ו- $D\setminus K_2$ ואינו שדה משמר בתחום האחר מבין שני אלה.

פתרון: אנו נרצה להשתמש בשיטת "הפרד ומשול" – לפרק את השדה הוקטורי הנתון לסכום של שני מחוברים פשוטים יותר ולטפל בכל אחד מהם בנפרד (בפיסיקה נקראת התופעה "עקרון סופרפוזיציה").
נסמן:

$$\begin{cases} P_1=\frac{1-y}{x^2+(y-1)^2} & Q_1=\frac{x}{x^2+(y-1)^2} \\ P_2=\frac{x}{x^2+(y+2)^2} & Q_2=\frac{y+2}{x^2+(y+2)^2} \end{cases}.$$

ברור ש- $(P,Q)=(P_1,Q_1)+(P_2,Q_2)$.
רכיבי כל אחד משני המחוברים הם פונקציות C^1 פרט לנקודה "בעיתית" אחת.
נתחיל במחובר השני ונמצא עבורו פונקצית פוטנציאל:

$$u(x,y)=\int\frac{xdx}{x^2+(y+2)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+(y+2)^2\right)}{x^2+(y+2)^2}=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+(y+2)^2\right)+C(y).$$

$u_y=Q_2$ ולכן $C(y)=const$, נבחר $C(y)\equiv 0$. כלומר, מצאנו פונקצית פוטנציאל $u(x,y)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+(y+2)^2\right)$ בתחום $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-2)\}$ ולכן השדה (P_2,Q_2) משמר בתחום זה.
אם כך, אז השדה משמר גם בכל תחום שחלק לו ובפרט בשני התחומים: $D\setminus K_1$ ו- $D\setminus K_2$.

נפנה למחובר: (P_1,Q_1) . נשים לב שמעגל ברדיוס 1 סביב הנקודה $(0,1)$ מוכל כולו בתחום $D\setminus K_2$. פרמטריזציה של מעגל זה כמסילה סגורה היא למשל: $\gamma(t)=(\cos t,\ 1+\sin t)$ כאשר $0\le t\le 2\pi$. מתקיים:

$$\int_\gamma P_1(x,y)dx+Q_1(x,y)dy=\int_0^{2\pi}\left(P_1(x(t),y(t)x'(t)+Q_1(x(t),y(t))y'(t)\right)dt=$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t+\sin^2 t}dt=2\pi$$

ידוע כי (P_2,Q_2) הוא שדה משמר בתחום $D\setminus K_2$, לכן $\int_\gamma P_2(x,y)dx+Q_2(x,y)dy=0$.
ולכן $\int_\gamma P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_\gamma P_1(x,y)dx+Q_1(x,y)dy+\int_\gamma P_2(x,y)dx+Q_2(x,y)dy\neq 0$.
מסקנה מיידית היא ש$\boxed{\text{שדה } (P,Q) \text{ אינו משמר בתחום } D\setminus K_2.}$

נותר לבדוק מה קורה ב- $D\setminus K_1$. נשים לב כי $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-2x(y-1)}{\left(x^2+(y-1)^2\right)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, זה נכון ב- $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,1)\}$ ולכן נכון גם ב- $\left(D\setminus K_1\right)\cup\{(0,-2)\}$. תחום זה הוא תחום פשוט קשר ולכן השדה (P_1,Q_1) משמר בתום זה וגם בתחום $D\setminus K_1$ המוכל בו. ידוע כבר שהשדה (P_2,Q_2) משמר ב- $D\setminus K_1$ ולכן גם $\boxed{(P,Q)=(P_1,Q_1)+(P_2,Q_2) \text{ הוא שדה משמר ב- } D\setminus K_1}$.

8. יהי $\alpha = x\,dx + yz\,dy + xy\,dz$ ו- $\beta = y^2\,dx + z\,dy - 3x\,dz$.

א. מצאו $\alpha \wedge \beta$.

ב. חשבו $\alpha \wedge \beta_{[1,1,1]^T}$.

ג. חשבו $\alpha \wedge \beta_{[1,1,1]^T}\left([1,2,3]^T, [2,-1,0]^T\right)$

ד. מצאו $d(\alpha \wedge \beta)$.

פתרון:

א. תוך שימוש בכללים: $dx_i \wedge dx_i = 0$ ו- $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ נקבל:

$$\alpha \wedge \beta = \left(x\,dx + yz\,dy + xy\,dz\right) \wedge \left(y^2\,dx + z\,dy - 3x\,dz\right) = \left(xz - y^3 z\right) dx \wedge dy +$$
$$+\left(-3x^2 - xy^3 z\right) dx \wedge dz + \left(-4xyz\right) dy \wedge dz$$.

ב. $$\alpha \wedge \beta_{[1,1,1]^T} = (0)\,dx \wedge dy + (-4)\,dx \wedge dz + (-4)\,dy \wedge dz = -4dx \wedge dz - 4dy \wedge dz$$

ג. $$\alpha \wedge \beta_{[1,1,1]^T}\left([1,2,3]^T, [2,-1,0]^T\right) = -4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 24 - 12 = 12$$

ד.

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\left(\left(xz - y^3 z\right) dx \wedge dy + \left(-3x^2 - xy^3 z\right) dx \wedge dz + \left(-4xyz\right) dy \wedge d\right) =$$
$$= \left(\ldots dx + \ldots dy + \left(x - y^3\right) dz\right) \wedge dx \wedge dy +$$
$$+\left(\ldots dx - 3xy^2 z\,dy + \ldots dz\right) \wedge dx \wedge dz +$$
$$+\left(-4yz\,dx + \ldots dy + \ldots dz\right) \wedge dy \wedge dz =$$
$$= \left(x - y^3\right) dz \wedge dx \wedge dy - 3xy^2 z\,dy \wedge dx \wedge dz - 4yz\,dx \wedge dy \wedge dz =$$
$$= \left(x - y^3 + 3xy^2 z - 4yz\right) dx \wedge dy \wedge dz$$