מבחן באלגברה לינארית 2 (88-113-01)

מועד ב 2020

מרצים: פרופ' בוריס קוניאבסקי וד"ר אליהו מצרי

יש לענות על **4** מתוך 5 השאלות.

יש לנמק היטב כל טענה ומעבר שאתם עושים.

משך הבחינה: שלוש שעות (לאחר הארכה)

חומר עזר מותר: אין.

<u>שאלה 1</u>:

תהי $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&3&2\\1&2&3\end{pmatrix}$ מצאו נוסחא מפורשת עבור A^n לכל n.

<u>שאלה 2</u>:

יהי $V/\mathbb{C}$ מרחב מכפלה פנימית ויהי T אופרטור צמוד לעצמו.

יהי $v\in V$ ונניח שקיים n כך ש $T^n(v)=0$. הוכיחו כי $T(v)=0$.

<u>שאלה 3</u>:

יהי $V=\mathbb{R}^5$ מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

תהי $A=\begin{pmatrix}2&1&1&0&0\\1&2&1&0&0\\1&1&2&0&0\\0&0&0&2&3\\0&0&0&3&2\end{pmatrix}$ ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי המוגדר לפי: $T(v)=Av$

א) האם T צמודה לעצמה?
ב) מצאו את הפולינום האופייני והפולינות המינימאלי עבור T.
ג) האם T ניתנת ללכסון אוניטרי? אם כן מצאו בסיס אורתונורמלי מלכסן עבור T.

שאלה 4: הוכח או הפרך

א) יהי $T:V\to V$ אופרטור אוניטרי ויהי $W\le V$ תת מרחב אינווריאנטי. אז $W^{\perp}$ גם אינווריאנטי.

ב) אם $T:V\to V$ אופרטור המקיים $T^2=T$ אז T ניתן לליכסון.

ג) יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהיו $W,U\le V$ תת מרחבים אז מתקיים $W^{\perp}\cap U^{\perp}=(W\cap U)^{\perp}$.

שאלה 5

לכל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה לכל $A\in\mathbb{R}^{3x3}$, לאף $A\in\mathbb{R}^{3x3}$ או שלפעמים כן ולפעמים לא (יש לתת דוגמא לכל מקרה), נתון שהע"ע של A הם 0,1,-1.

א) A סימטרית.

ב) A ניתנת ללכסון.

ג) $A=A^2$.

בהצלחה!