אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 3

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

1. יהי R חוג ונניח ש I אידיאל שמאלי של R. נגדיר $I^{+}=\{x\in R: xR\subseteq I\}$.
   א. הוכח ש $I^{+}\triangleleft R$.
   ב. אם $I\triangleleft R$ אז $I\subseteq I^{+}$.
   ג. נניח ש R חוג עם יחידה. הוכח ש $I^{++}=I^{+}$.
2. יהי $\{U_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$ אוסף אידיאלים של R. הוכח $\cap_{\lambda\in\Lambda}U_\lambda$ אידיאל של R.
3. מצאו אידיאלים שמאליים I,J של $M_2(\mathbb{Z})$ כך ש $IJ\neq JI$.
4. תהיי X קבוצה. עבור $A,B\subseteq X$ נסמן: $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$. [תזכורת: $(P(x);\Delta,\cap)$ הוא חוג קומוטטיבי עם יחידה]
   א. תהיי $\varnothing\neq\tau\subseteq P(x)$.
   נאמר ש τ סגור לאיחוד אם $A,B\in\tau\to A\cup B\in\tau$.
   נאמר ש τ סגור להקטנה אם $A\subseteq B\in\tau\to A\in\tau$.
   הוכיחו ש $\varnothing\neq\tau\subseteq P(X)$ הוא אידיאל אם ורק אם τ סגור לאיחוד ולהקטנה.
   ב. הוכיחו כי עבור X סופי, $\tau\subseteq P(X)$ הוא אידיאל אם ורק אם קיים $C\subseteq X$ כך ש $\tau=P(C)$.
5. א. הוכיחו ש $\langle 2x-1\rangle,\langle x-1\rangle$ הם קו-מקסימאליים ב $\mathbb{Z}[x]$.
   ב. הוכיחו שהאידיאל $\langle x-1\rangle$ אינו מקסימאלי ב $\mathbb{Z}[x]$ ושהאידיאל $\langle 2x-1\rangle$ גם כן אינו מקסימאלי ב $\mathbb{Z}[x]$.
6. יהי $R=\mathbb{Z}_3[x]$ ו $I=\langle x+2\rangle$. רשמו לוח כפל וחיבור לחוג המנה R/I.