הוכחה מההרצאה

גיא בלשר

7 במאי 2014

11. לכל מרחב מטרי (X,d) ולכל תת־קבוצה צפופה $Y \subseteq X$, האוסף $\gamma := \left\{ B\left(a, \frac{1}{n}\right) \right\}_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ a \in Y}}$ מהווה בסיס לטופולוגיה $\tau = \mathbf{top}\left(d\right)$.

<u>**הוכחה**</u> ראשית, לכל $a \in Y$ ולכל $n \in \mathbb{N}$, $B\left(a, \frac{1}{n}\right) \in \tau$, ולכן $\gamma \subseteq \tau$.
תהי קבוצה פתוחה שאינה ריקה $\emptyset \neq O \in \tau$. נרצה להראות שהיא שווה לאיחוד מסוים של איברים מ־γ.
Y צפופה ב־X, ולכן $\mathrm{cl}\left(Y\right) = X$.

טענת עזר: יהי (X,τ) מרחב טופולוגי. אזי Y קבוצה צפופה בו אם ורק אם לכל קבוצה פתוחה שאינה ריקה $\emptyset \neq O \in \tau$, $O \cap Y \neq \emptyset$.
<u>הוכחה</u>

- $\Leftarrow$ - $O \neq \emptyset$, ולכן קיים $x \in O$. $x \in X = \mathrm{cl}\left(Y\right)$, ולכן בכל סביבה של x קיים איבר מ־Y. O סביבה של x, כי היא קבוצה פתוחה המכילה את x, ולכן גם ב־O קיים איבר מ־Y, כלומר $O \cap Y \neq \emptyset$.
- $\Rightarrow$ - ניקח $x \in X$, ותהי $U \in N\left(x\right)$. לכן, קיימת $O \in \tau$ שעבורה $x \in O \subseteq U$. $O \cap Y \neq \emptyset$, לכן $U \cap Y \neq \emptyset$. קיבלנו ש־Y נחתכת עם כל סביבה של x, ולכן $x \in \mathrm{cl}\left(Y\right)$. לכן, $X \subseteq \mathrm{cl}\left(Y\right)$. אבל גם $\mathrm{cl}\left(Y\right) \subseteq X$, ולכן $\mathrm{cl}\left(Y\right) = X$, כלומר Y צפופה ב־X.

יהי $y \in O \cap Y$. O פתוחה, ולכן קיים $\varepsilon > 0$ שעבורו $B\left(y, \varepsilon\right) \subseteq O$. לכן, לכל $\frac{1}{\varepsilon} < n \in \mathbb{N}$, $B\left(y, \frac{1}{n}\right) \subseteq O$.

טענת עזר: $O = \bigcup_{y \in O \cap Y, B\left(Y, \frac{1}{n}\right) \subseteq O} B\left(y, \frac{1}{n}\right)$.

<u>הוכחה</u> נסמן את אגף שמאל $\tilde{O}$

- $\subseteq$ - ברור, כי לכל $y \in Y \cap O$ קיים $n \in \mathbb{N}$ שעבורו $B\left(y, \frac{1}{n}\right) \subseteq O$ (לפי הנימוק שלפני טענה זו).
- $\supseteq$ - יהי $x \in O$. קיים $\varepsilon > 0$ שעבורו $B\left(x, \varepsilon\right) \subseteq O$. לכן, עבור $\frac{1}{\varepsilon} < n_0 \in \mathbb{N}$ כלשהו, $B\left(x, \frac{1}{n_0}\right) \subseteq O$.

נסתכל על $U = B\left(x, \frac{1}{2n_0}\right)$. זו קבוצה פתוחה שאינה ריקה (כי x בה), ולכן קיים

$y \in Y \cap U \subseteq Y \cap O$.

נוכיח כי $B\left(y, \frac{1}{2n_0}\right) \subseteq O$: לכל $a \in B\left(y, \frac{1}{2n_0}\right)$,

$$d\left(a, x\right) \overset{m_3}{\leq} d\left(a, y\right) + d\left(y, x\right) < \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{n_0}$$

ולכן $a \in B\left(x, \frac{1}{n_0}\right) \subseteq O$, כלומר $a \in O$. אם כן, $B\left(y, \frac{1}{2n_0}\right) \subseteq O$.

מצאנו כדור (= סביבה פתוחה) של y, שרדיוסה $\frac{1}{2n_0}$ והיא מוכלת ב־O, ולכן היא חלק מהאיחוד הנ"ל, כלומר $B\left(y, \frac{1}{2n_0}\right) \subseteq \tilde{O}$, ומכאן $x \in \tilde{O}$ (מפני שהנקודה x שייכת ל־$B\left(y, \frac{1}{2n_0}\right)$ כי $d\left(x, y\right) < \frac{1}{2n_0}$, והכדור מוכל ב־$\tilde{O}$).

ולכן סיימנו ־ הוכחנו שכל קבוצה פתוחה שווה לאיחוד כלשהו של איברים מ־γ.

מש"ל