

תרגיל בית 8 אלגברה מופשטת 2

1. יהי R חוג קומוטטיבי נותרי. ויהי $P \triangleleft R$ אידיאל ראשוני. הוכיחו כי המיקום $R_P = (R - P)^{-1} R$ הוא גם חוג נותרי.
2. יהי F שדה. הראו כי החוג $F[x, y] \subseteq F[x, xy, xy^2, xy^3, \dots]$ הוא לא נותרי.
3. חשב את ה gcd של $85, 1 + 13i$ ב $\mathbb{Z}[i]$.
4. מצא יוצר של האידיאל $\langle 47 - 13i, 53 + 56i \rangle$ ב $\mathbb{Z}[i]$.
5. חשבו את המנה והשארית בחלוקה של 63 ב $\frac{1}{2}(11 + 5\sqrt{-11})$ בחוג \mathcal{O}_{-11} .
6. יהי $d \equiv 1 \pmod{4}$.
 - (א) הוכח כי 2 הוא אי-פריק ב $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.
 - (ב) הוכח כי $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ הוא לא תפ"י.(הנחייה: הראה ש $(2 \mid (1 + \sqrt{d})^2)$.)
7. הסבר מדוע העובדה ש $(-1 + \sqrt{7})(1 + \sqrt{7}) = 6 = 2 \cdot 3$ לא סותר את העובדה ש $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ הוא תפ"י.
8. יהי $n \in \mathbb{N}, 2 \leq n$, הראו ש $\mathbb{Z}[in] \subseteq \mathbb{C}$ הוא לא תפ"י.
(רמז: ni הוא אי-פריק אבל לא ראשוני. היעזרו בנורמה של $\mathbb{Z}[i]$.)