אינפי 1 – פתרון תרגיל 2

2. יהי $x\in\mathbb{R}$ מספר ממשי המקיים $x\geq 0$. נניח בנוסף $\forall\varepsilon>0:x<\varepsilon$. הוכח/הפרך: $x=0$.

הוכחה:

נניח בשלילה $x\neq 0$, לכן לפי הנתון $x>0$. ניקח $\varepsilon=\frac{x}{2}$, לכן $0<\varepsilon<x$ בסתירה לנתון **שלכל** $0<\varepsilon$ מקיים $x<\varepsilon$.

3. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שקיים $\varepsilon>0$ כך ש $\forall a\in A:a>\varepsilon$ הוכח שאפס אינו החסם התחתון של A.

הוכחה: נניח בשלילה ש-0 הוא חסם תחתון של A. אזי לכל $r>0$ (בפרט עבור $r=\varepsilon$) מתקיים ש- $0+r=0+\varepsilon$ **אינו** חסם מלרע של הקבוצה. ולכן קיים $a\in A$ המקיים $a<0+\varepsilon=\varepsilon$, בסתירה לנתון.

4. תהי $B=\left\{(-1)^{n-1}(2+\frac{3}{n})\,|\,n\in\mathbb{N}\right\}$. מצא חסם עליון, חסם תחתון, מינימום ומקסימום (כאשר הם קיימים)

תשובה: מקסימום 5, מינימום $-3\frac{1}{2}$

5. יהיו קבוצות לא ריקות $A,B\subseteq\mathbb{R}$, נניח שמתקיים $\forall a\in A,\forall b\in B:a\leq b$ (כל איבר ב A קטן שווה מכל איבר ב B)

*א. הוכח: $\sup A\leq\inf B$ (תרגיל חשוב מאד)

פתרון: נניח בשלילה ש $\sup A>\inf B$ ניקח $\varepsilon=\frac{\sup A-\inf B}{2}>0$ אזי

$\sup A-\varepsilon=\frac{\sup A+\inf B}{2}$ שזה אמצע הקטע $[\inf B,\sup A]$. אבל לפי משפט קיים $a\in A$ כך ש $a>\sup A-\varepsilon$.

$\sup A-\varepsilon=\frac{\sup A+\inf B}{2}=\inf B+\varepsilon$ אבל לפי משפט קיים $b\in B$ כך ש $a<\sup A-\varepsilon=\inf B+\varepsilon>b$. ובסיכום מצאנו $a<b$ בסתירה לנתון.

<u>דרך נוספת:</u>

נניח בשלילה ש $\sup A>\inf B$. $\sup A$ הוא החסם העליון של A ובפרט חסם מלעיל **מינימלי** של A. מכיון ש $\sup A>\inf B$ נסיק ש- $\inf B$ **אינו** חסם מלעיל של A. כלומר, קיים $a_0\in A$ כך ש $\inf B>a_0$. $\inf B$ הוא החסם התחתון של B בפרט חסם מלרע **מקסימלי** של B. מכיון ש $\inf B>a_0$ נסיק ש a_0 **אינו** חסם מלרע של B. כלומר, קיים $b_0\in B$ כך ש $a_0>b_0$. זה כמובן סותר את הנתון: $\forall a\in A,\forall b\in B:a\leq b$. מכאן בהכרח $\sup A\leq\inf B$.

ב. נניח שמתקיימים שיוויון בסעיף א', כלומר, $\sup A=\inf B$. הוכח/הפרך: $A\cap B\neq\phi$.
(במילים: יש איבר שנמצא גם ב A וגם ב B).

הפרכה: ניקח $A=(0,1)$ ו- $B=(1,2)$. $\sup A=\inf B=1$ אבל $A\cap B=\phi$.

ג. אם הוכחת בסעיף ב', מה הוא האיבר המשותף ל A ו B? אם הפרכת, מתי כן יהיה לשתי הקבוצות איבר משותף?

תשובה: ברור שאם $\sup A\in A$ וגם $\inf B\in B$ (שזה שקול לכך של A יש מקסימום ול B יש מינימום) נקבל ש $A\cap B\neq\varnothing$. נראה שגם ההיפך נכון כלומר שאם $A\cap B\neq\varnothing$ אזי $\sup A\in A$ וגם $\inf B\in B$. נניח $c\in A\cap B\neq\varnothing$. עפ"י הנתון $\forall a\in A,\forall b\in B: a\leq b$

$c\in B$ ולכן נקבל מהנתון ש $\forall a\in A: a\leq c$ כלומר c חסם מלעיל של A ומצד שני

$c\in A$ לכן $c=\max A=\sup A\in A$.

באופן דומה ניתן להוכיח $c=\min B=\inf B\in B$

6. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$, נתון $0\notin A$. נגדיר את הקבוצה A^{-1} באופן הבא $A^{-1}=\left\{\frac{1}{a}\,|\,a\in A\right\}$. הוכח או הפרך על ידי דוגמא נגדית:

א. אם A חסומה מלעיל אזי A^{-1} חסומה מלעיל

ב. אם A חסומה מלעיל אזי A^{-1} חסומה מלרע

ג. אם A^{-1} חסומה מלעיל אזי A חסומה מלעיל

ד. אם A^{-1} חסומה מלעיל אזי A חסומה מלרע

הפרכה: ניקח $A=(-1,0)\cup(0,1)=\{x\in R\,|\,-1<x<0, or, 0<x<1\}$. A חסומה על ידי ± 1 אבל $A^{-1}=(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ אינה חסומה מלעיל ואינה חסומה מלרע. $(A^{-1})^{-1}=A$ ולכן גם הכיוונים ההפוכים לא נכונים.

7. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה חסומה מלעיל. נגדיר $B=\{-a\,|\,a\in A\}$ הוכח ש B חסומה מלרע וש- $\inf B=-\sup A$

פתרון: A חסומה מלעיל, נניח על ידי M כלומר $\forall a\in A: a\leq M$ לכן $\forall a\in A: -M\leq -a$ כלומר B חסומה מלרע ע"י $-M$. כמו כן, אם M הינו חסם המלעיל הקטן ביותר של A, וודאי ש $-M$ הינו חסם המלרע הגדול ביותר של B (קל להוכיח).

8. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ כך ש $\forall a \in A: a > 0$ ותהיי $A^{-1} = \left\{ \frac{1}{a} \mid a \in A \right\}$.

הוכח ש m חסם תחתון של A $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{m}$ חסם עליון של A^{-1} (ואפס חסם תחתון של A אם"ם A^{-1} לא חסומה).

הוכחה:

<u>נפתור את המקרה בסוגריים</u>

כיוון 1: נניח ש- $m = 0$ הוא חסם תחתון של A ונוכיח ש- A^{-1} לא חסומה. יהי $M > 0$ ונראה שקיים $a \in A$ כך ש- $\frac{1}{a} > M$ (וזה יראה שהקבוצה אינה חסומה מלעיל ולכן אינה חסומה). אכן, לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש $a < 0 + \varepsilon = \varepsilon$ (כי $m = 0$ חסם תחתון) בפרט עבור $\varepsilon = \frac{1}{M}$ ולכן קיים $a \in A$ כך ש $a < \varepsilon = \frac{1}{M}$ ולכן $\frac{1}{a} > M$ כלומר A^{-1} לא חסומה (שימו לב שאיברי A חיוביים ולכן אי השוויון האחרון תקף).

כיוון 2: נניח A^{-1} לא חסומה. שימו לב ש- A^{-1} חסומה מלרע על ידי 0, ולכן אם נתון שהיא לא חסומה, נובע מכך שהיא לא חסומה מלעיל. לכן:

(*) לכל $M > 0$ קיים $a \in A$ כך ש $\frac{1}{a} > M$.

כבר ידוע ש-0 הוא חסם מלרע ולכן נותר להוכיח שהוא חסם מלרע הגדול ביותר. כלומר: לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש- $a < 0 + \varepsilon$. כעת, יהי $\varepsilon > 0$. ניקח $M = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ ולכן על פי (*) קיים $a \in A$ כך ש $\frac{1}{a} > M = \frac{1}{\varepsilon}$ ולכן $a < \varepsilon$.

<u>נוכיח את הטענה העיקרית</u>

כעת, נניח $m \neq 0$

כיוון 1: לכן $\forall a \in A: m \le a$ ולכן $\forall a \in A: \frac{1}{a} \le \frac{1}{m}$ כלומר $\frac{1}{m}$ חסם מלעיל של A^{-1}. נניח בשלילה ש- M_1 חסם מלעיל קטן יותר ל A^{-1} כלומר $M_1 < \frac{1}{m}$ ו $\forall a \in A: \frac{1}{a} \le M_1$. אבל אז $\forall a \in A: \frac{1}{M_1} \le a$ כלומר $\frac{1}{M_1}$ חסם מלרע של A. אבל $M_1 < \frac{1}{m}$ ולכן $\frac{1}{M_1} > m$ בסתירה לכך ש m חסם תחתון.

כיוון 2: נניח $\frac{1}{m}$ חסם עליון של A^{-1}. באופן דומה להוכחה בכיוון הקודם, ניתן להוכיח את הטענה:

M חסם עליון של B גורר ש- $\frac{1}{M}$ הוא חסם תחתון של B^{-1} (כמובן, עבור B - תת קבוצה של מספרים חיוביים). לאחר מכן נגדיר $B = A^{-1}$ ולכן $B^{-1} = A$ ומכאן הטענה תנבע.