5. הוכיחו שמ"ט X הוא מרחב האוסדורף אם"ם לכל $x \in X$ מתקיים:

$$\bigcap_{\substack{F^\circ \ni x \\ \text{סגורה}-F}} F = \{x\}$$

הוכחה. כיוון 1,יהי מ"ט האוסדורף. נוכיח שתי הכלות:

ההכלה ראשונה:

$$\{\boldsymbol{x}\} \subseteq \bigcap_{\substack{F^\circ \ni x \\ \text{סגורה}-F}} F$$

פנים של קבוצה במ"ט מוכל בקבוצה עצמה. לכן לכל F סגורה כך ש-$x \in F^\circ$ מתקיים $x \in F^\circ \subseteq F$. מכאן:

$$x \in \bigcap_{\substack{F^\circ \ni x \\ \text{סגורה}-F}} F \Rightarrow \{x\} \subseteq \bigcap_{\substack{F^\circ \ni x \\ \text{סגורה}-F}} F$$

ההכלה השניה:

$$\bigcap_{\substack{F^\circ \ni x \\ \text{סגורה}-F}} F \subseteq \{\boldsymbol{x}\}$$

נניח, $x \neq y$. כיוון שהמרחב הוא מ"ט האוסדורף, קיימות סביבות U_x, V_y כך ש-$x \in U_x, y \in V_y$ ו- $U_x \cap V_y = \emptyset$.

נסמן: $F_0 \coloneqq V_y^c$. לכן $y \notin F_0$.

F_0 סגורה ו- $F_0 \supseteq U_x$. לכן $x \in F_0^\circ$. כיוון ש- $y \notin F_0$:

$$y \notin \bigcap_{\substack{F^\circ \ni x \\ \text{סגורה}-F}} F$$

כלומר, החיתוך לא מכיל איברים שונים מ-x , זאת אומרת:

$$\bigcap_{\substack{F^\circ \ni x \\ \text{סגורה}-F}} F \subseteq \{x\}$$

על סמך שתי ההכלות אנחנו תוענים שמתקיים השוויון הנדרשת מש"ל.

<u>כיוון 2. נניח לכל $x \in X$ מתקיים השוויון :</u>

$$\bigcap_{\substack{F^\circ \ni x \\ F-\text{סגורה}}} F = \{x\}$$

ויהיו $a \neq b \in X$. אזי

$$b \notin \bigcap_{\substack{F^\circ \ni a \\ F-\text{סגורה}}} F \;, \qquad a \notin \bigcap_{\substack{F^\circ \ni b \\ F-\text{סגורה}}} F$$

לכן קיימות שתי קבוצות:

$F_a \subseteq X$ סגורה כך ש- $a \in F_a^\circ$ ו- $b \notin F_a$

נסמן $U_a = F_a^\circ$ ו- $V_b = F_a^c$

אזי U_a ו-V_b פתוחות. $b \in V_b$. ולבסוף:

$$U_a = F_a^\circ \subseteq F_a \Rightarrow U_a \cap V_b = F_a^\circ \cap F_a^c = \emptyset$$

כך מצאנו לשתי נקודות שונות שתי סביבות זרות שמבדילות את הנקודות זו מזו. לכן X מרחב האוסדורף, מש"ל.