מבוא לטופולוגיה – תרגיל 6

שאלה 1

תזכורת. תורת הקבוצות.

סימון: אם בנוסחה מסוימת (או בחלקה) מתכוונים לתת-קבוצות של קבוצה אחת קבועה אז הקבוצה הזאת נקראת "אוניברסלית". נסמן את הקבוצה האוניברסלית ב-$\mathbb{X}$.

אם $A \subseteq \mathbb{X}$ אז הקבוצה $\mathbb{X} - A$ נקראת *משלים של* A ב-$\mathbb{X}$.

המשלים של A מסמנים ב-A^c . איזו קבוצה היא "*אוניברסלית*" בטקסט מתמטי כזה או אחר מוגדר על ידי ההקשר קונקרטי. למשל בנוסחה 26 באגף השמאלי המשלים ביחס ל-$\mathbb{Y}$ **,** ובאגף הימיני המשלים ביחס ל-$\mathbb{X}$.

יהו $\boldsymbol{A, A_\alpha, B, B_\alpha} \subseteq \mathbb{X}$

1. $A \subseteq A$
2. $\mathrm{A} = \mathrm{B} \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
3. $\mathrm{A} \subseteq B \wedge B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$
4. $\mathrm{A} \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$
5. $\emptyset \subseteq A$, $\emptyset \cap B = \emptyset$, $\emptyset \cup B = B$
6. $A \cap B = B \cap A$
7. $A \cup B = B \cup A$
8. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
9. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
10. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
    10.1. $A \cap (\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I}(A \cap B_\alpha)$
11. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
    11.1. $A \cup (\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} (A \cup B_\alpha)$
12. $\mathrm{A} \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$
13. $(A^c)^c = A$
14. $A - B = A \cap B^c$
15. $\emptyset^c = \mathbb{X}$
16. $\mathbb{X}^c = \emptyset$
17. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,
    17.1. $(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha^c$
18. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$,
    18.1. $(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha)^c = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha^c$

==

$\boldsymbol{f}: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$

$\boldsymbol{A, A_\alpha} \subseteq \mathbb{X}$ **;** $\boldsymbol{B, C, B_\alpha} \subseteq \mathbb{Y}$

19. $f(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$
20. $f(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$
    20.1. $f(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$ אם f חח"ע:
21. $f^{-1}(\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(B_\alpha)$

22. $f^{-1}(\cap_{\alpha\in I} B_\alpha) = \cap_{\alpha\in I} f^{-1}(B_\alpha)$
23. $f\circ f^{-1}(B) = B\cap f(\mathbb{X})$
23.1. $f\circ f^{-1}(B) = B$ אם f על:
24. $f^{-1}\circ f(A) \supseteq A$
24.1. $f^{-1}\circ f(A) = A$ אם f חח"ע:
25. $C\subseteq B \Rightarrow f^{-1}(B-C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$
26. $f^{-1}(B^c) = \left(f^{-1}(B)\right)^c$
27. $f(A^c) = f(A)^c$ אם f חח"ע ועל:

==

א) <u>הוכיחו</u> (בבדיקת שייכות איבר - איבר) את הנוסחאות מס' 10.1, 11.1, 20-27.

ב) <u>תנו דוגמאות</u> בהן מתקיימות הכלות של ממש בנוסחאות 20 ו-24.

<u>שאלה 2</u>

<u>תזכרת</u>

נסמן ב-$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מספרים ממשיים שאיבר ה-n שלה הוא מספר x_n.

תהי l_∞ קבוצה של כל הסדרות הממשיות החסומות, ז"א,

$$l_\infty = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\, , x_n\in\mathbb{R} \mid \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| < \infty\}$$

<u>נזכיר שהוכח בתרגיל בית 3 , שאלה 1. א'</u> שפונקציה $d: l_\infty\times l_\infty\to[0,\infty)$ כאשר $d_\infty((x_n)\,,(y_n)\,) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n-y_n|\}$, מהווה מטריקה על l_∞.

==

יהי X קבוצת הסדרות כך ש-$X = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n\in\mathbb{R} \mid \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$.

<u>הוכיחו:</u>

א) $X\subseteq l_\infty$,

ב) הקבוצה F של הסדרות מסוג $(x_1, x_2, \dots, x_k, 0,0, \dots)$ (ז"א, הסדרות עם מספר סופי של איברים הלא אפסיים) היא תת-קבוצה ב-X.

ג) F צפופה ב-X בטופולוגיה המושרת על ידי המטריקה d.

שאלה 3

נתבונן ברבוע Q במשור $\mathbb{R}^2$ עם הקודקדים: $(1,0)(1,1),(0,1),(0,0)$.

ז"א:

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 0, 0 \le y \le 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 1, y = 1\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x = 1, 0 \le y \le 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 1, y = 0\}$$

הוכיחו ש-Q אינו איזומורפי ל-$\mathbb{R}$, ולשום קטע (פתוח, סגור או חצי סגור) ב-$\mathbb{R}$ ולשום קרן (פתוחה או סגורה מצד אחד) ב-$\mathbb{R}$.

שאלה 4

תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הוכיחו ש*הגרף של הפונקציה*, זאת אמרת, התת-תמרחב של המשור האוקלידי $\mathbb{R}^2$ המוגדר על ידי נוסחה:

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = f(x)\}$$

הוא מרחב טופולוגי קשיר. (רמז: הוכיחו שפונקציה $(x \mapsto (x, f(x))$ רציפה.)

שאלה 5

תהי X קבוצה אינסופית. תהי τ - קבוצת תת-קבוצות ב-X

כך ש-$\tau = \{U \subseteq X | U^c - \text{קבוצה סופית}\} \cup \{\emptyset\}$.

הוכיחו:

א) τ – טופולוגיה ב-X (עשינו את זה פעם בכיתה!)
ב) (X, τ) מרחב קשיר.