מבוא לטופולוגיה

תוכן תרגיל כיתה 3

הקדמה

אני מניח ששמעתם וראיתם את הארצאה 2 של פרופ' נוביק

היום נלמד שני נושאים:

1. רציפות
2. קומפקטיות

רב הזמן נהיה ב-"Mute all"

מדי פעם אני עאסה הפסקת לשאלות שתשאלו אותן דרך הצ'ט

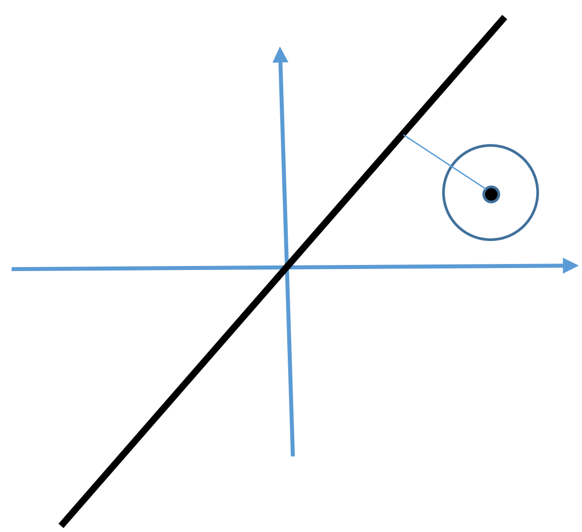
==

קודם כל:

<u>תרגיל ("חמום")</u>

הוכיחו שהקבוצה $\Delta = \{(x,x) \in \mathbb{R}^2 | \ x \in \mathbb{R})\}$ סגורה במרחב אוקלידי $\mathbb{R}^2$.

<u>הוכחה</u>



$\forall \notin \Delta \ \exists \varepsilon > 0: \ B(x,\varepsilon) \subseteq \Delta^c$. לכן Δ^c פתוחה ו- Δ סגורה, מש"ל.

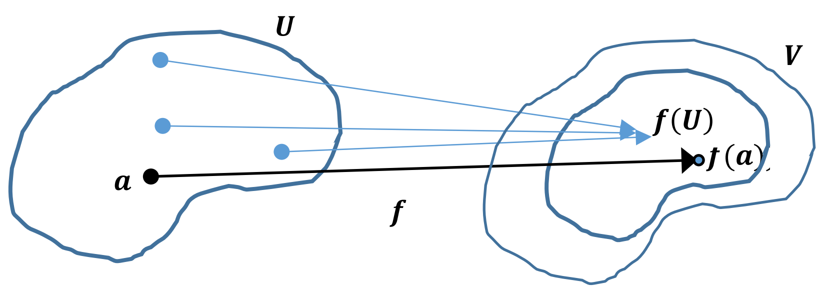
פונקציות רציפות

תזכורת

הגדרה.

יהיו M,N מרחבים מטריים ו- $a \in M$.

פונקציה $f: M \to N$ רציפה ב-a אם"ם לכל סביבה $V \subseteq N$ של $f(a)$ קיימת סביבה $M \supseteq U$ של a כך ש- $f(U) \subseteq V$.



משפט. יהיו M,N מרחבים מטריים ו- $a \in M$.

פונקציה $f: M \to N$ רציפה בנקודה a אם"ם

$$x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$$

משפט. יהיו M,N מרחבים מטריים. פונקציה $f: M \to N$ רציפה אם"ם לכל $U \subseteq N$ פתוחה ב-N מתקיים ש- $f^{-1}(U)$ פתוחה ב-M .

==

תרגיל

כמו שדובר בתרגיל 2 , כל סדרה s עם איברים x_n במרחב מטרי M היא בעצם פונקציה $s: \mathbb{N} \to (M,\rho)$ כך ש- $s: n \mapsto x_n$ או $s(n) = x_n$.

הקבוצה $\mathbb{N}$ של מספרים טבעים היא תת קבוצה של $\mathbb{R}$. לכן אפשר להסתכל על $\mathbb{N}$ כמו על תת מרחב מטרי של מרחב $\mathbb{R}$ עם המטריקה הרגילה שלו: $d_E(x,y) = |x-y|$.

הוכיחו :

א' נקודון $\{x\}$ ב-$(\mathbb{N}, d_E)$ קבוצה פתוחה
ב' כל תת קבוצה ב-$(\mathbb{N}, d_E)$ קבוצה פתוחה
ג' פונקציה $s: (\mathbb{N}, d_E) \to (M, \rho)$ רציפה.

הוכחה. במרחב $\mathbb{N}$: $d(m,n) \geq$ לכל שני טבע
א' $\{x\} = B_{d_E}\left(x, \frac{1}{2}\right)$ כיוון ש-

$$y \in B_{d_E}\left(x, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow d(y,x) < \frac{1}{2} \Rightarrow |y - x| < \frac{1}{2} \Rightarrow y = x \Rightarrow y \in \{x\}$$

ב' כמו שנעשה גם בהרצאה : אם $A \subseteq \mathbb{N}$ תת קבוצה כלשהי ב-$\mathbb{N}$ אז:

$A = \cup_{x \in A} \{x\} = \cup_{x \in A} B_{d_E}\left(x, \frac{1}{2}\right)$ ולכן A פתוחה כאחרד הפתוחות.

ג' נניח ש- $U \subseteq M$ פתוחה. אזי $s^{-1}(U) \subseteq \mathbb{N}$ פתוחה לפי ב'. לכן s רציפה לפי הקריטריון למעלה.

תרגיל

תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה שמקיימת : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & x \in \mathbb{Q}: x = \frac{p}{q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
כאשר p, q מספרים שלמים זרים $q > 0$.) השבר מצומצם(
הוכיחו ש- f אינה רציפה בכל נקודה $a \in \mathbb{Q}$ ורצפה בכל נקודה $a \notin \mathbb{Q}$.
(המטריקה ב- $\mathbb{R}$ רגילה)

הוכחה.

א) $a \in \mathbb{Q}$.
ידוע לכם מהקורסים הקודמימ אותם למדתם שבין כל שני מספרים רציומליים קיים מספר אירציונלי (אני לא מתכוון להוכיח את זה). לכן לכל n טבעי קיים מספר אירציונלי x_n כך ש- $a < x_n < a + \frac{1}{n}$. מזה מקבלים בקלות:

$$0 < d(x_n, a) = x_n - a < \frac{1}{n} \Rightarrow d(x_n, a) \to 0$$

ונקבל $x_n \to a$. כיוון שכל x_n אירציונליים, לכל n: $f(x_n) = 0$ (לפי הגדרת f). לכן $f(x_n) \to 0$.

מצד אחר, לפי ההנחה $a = \frac{p}{q}$ כאשר p, q מספרים שלמים זרים ו-$q > 0$.

לכן $f(a) = \frac{1}{q}$. קיבלנו סופית :

$x_n \to a$ ו- $f(x_n) \to 0 \neq \frac{1}{q} = f(a)$.

לפי קריטריון הסדרות מההרצאה f אינה רציפה ב-a , מש"ל.

ב) <u>$a \notin \mathbb{Q}$.</u>

<u>הערה.</u> פונקציה f מוגדרת היטב: אם $x \in \mathbb{Q}$ אז ישנן אין סוף אפשרויות להציג אותו כשבר $(q > 0)$ $\frac{p}{q}$. אבל קיים שבר יחידי מזוג הזה שהוא מצומצם, זאת אומרת, שהמונה והמכנה שלו הםמספרים זרים. המכנה של השבר המצומצם מינמלי ביחס לשאר השברים המייצגים x . נסמן אותו $Q(x)$.

<u>טענת עזר 1.</u> אם $x, x' \in \mathbb{Q}$ שני מספרים הסמוכים על הציר $\mathbb{R}$ כך ש- $Q(x) = Q(x') = q$, אז $|x - x'| \geq \frac{1}{q}$.

<u>הוכחת הטענה</u>. נניח בלי הגבלת הכלליות ש- $x' > x$ ונניח ש-$x = \frac{p}{q}$.

אם $\frac{p+1}{q}$ שבר לא מצומצם אז $Q\left(\frac{p+1}{q}\right) < q$ ולכן $x' > \frac{p+1}{q}$ אז $|x' - x| > \frac{1}{q}$. ואם $\frac{p+1}{q}$ שבר מצומצם אז $Q\left(\frac{p+1}{q}\right) = q$ ולכן $x' = \frac{p+1}{q}$ אז $|x' - x| = \frac{1}{q}$. ז"את בשני המקרים $|x - x'| \geq \frac{1}{q}$, מש"ל.

<u>הוכחת רציפות f ב-a ($a \notin \mathbb{Q}$).</u> נשתמש בקריטריון הסדרות:

נניח ש- $x_n \to a$ ונוכיח ש-$f(x_n) \to f(a)$.

==

<u>טענת עזר 2.</u> בהנתן $x_n \to a$ ו- $a \notin \mathbb{Q}$: כל איבר רציונלי r מופיע בסדרה x_n לא יותר ממספר סופי של פעמים (אינדקסים). כי אחרת קיימת תת סדרה x_{n_i} כך ש- $x_{n_i} = r \to r$ וזה סותר ל- $x_n \to a$.

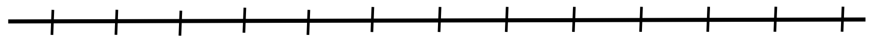
==

אז יהי $x_n \to a$ ו- $\varepsilon > 0$. כיוון ש- $f(a) = 0$, מספיק להוכיח

<u>שכל אברי הסדרה</u> $f(x_n)$ <u>אולי פרט למספר אינדקסים סופי</u>

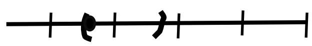
מקיימים $|f(x_n)| < \varepsilon$.

קודם כל נשים לב ש- כל מספר טבעי N מאפשר לפצל $\mathbb{R}$ לקטעים באורך $\frac{1}{N}$:



.

a כמספר אירציונלי תמיד יחול בין שני נקודות הפיצול. ברור שככל ש-N גדול יותר קטע הפיצול קצר יותר. ולכן קיימים N_0 ו-k_0

כך ש- $a-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{k_0}{N_0} < a < \frac{k_0+1}{N_0} < a+\frac{\varepsilon}{2}$ 

עכשיו אנחנו נעסוק במיון האנדקסים: נחלק אותם בתת קבוצות מסוימות: $\mathbb{N} = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4$ באופן הבא.

הנחנו ש- $x_n \to a$. זה אומר <u>שקיים מספר טבעי M כך שהחל ממנו</u> $x_n \in \left(\frac{k_0}{N_0}, \frac{k_0+1}{N_0}\right)$.

<u>נגדיר:</u>

<u>1)</u> $I_1 = \{1,2,\ldots,M-1\}$.

<u>2)</u> $I_2 = \{n \geq M | x_n \notin \mathbb{Q}\} \Leftarrow f(x_n) = 0 \Leftarrow |f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$.

<u>3)</u> $I_3 = \{n \geq M | x_n \in \mathbb{Q} \wedge Q(x_n) < N_0\}$

<u>4)</u> $I_4 = \{n \geq M | x_n \in \mathbb{Q} \wedge Q(x_n) \geq N_0\} \Leftarrow |f(x_n) - f(a)| = \frac{1}{Q(x_n)} \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon$.

אז מתברר ש- I_1 קבוצה סופית, I_2 ו-I_4 מקיימות $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$.

==

נשאר להוכיח ש- I_3 קבוצה סופית. באמת:

יהי $x = x_n \in \mathbb{Q} \wedge n \geq M$, ו- $0 < Q(x) = q < N_0$.

לכן $x \in \left(\frac{k_0}{N_0}, \frac{k_0+1}{N_0}\right)$. לפי טענת עזר 1 ובהנתן $q < N_0$, כל מספר רציונלי x'

עם $Q(x') = q$ השונה מ-x נמצא מחוץ ל-$\left(\frac{k_0}{N_0}, \frac{k_0+1}{N_0}\right)$.

אז $\left(\frac{k_0}{N_0}, \frac{k_0+1}{N_0}\right)$ מכיל <u>לא יותר ממספר רציונלי r אחד המקיים</u> $Q(r) = q$.

כיוון שקיימים רק מספר סופי של q עם תנאי $q < N_0$ אז הקטע $\left(\frac{k_0}{N_0}, \frac{k_0+1}{N_0}\right)$ מכיל <u>לא יותר ממספר סופי של רציונליים x המקיימים</u> $Q(x) < N_0$. אבל לפי טענת עזר 2 רק מספר סופי של אינדקסים מאנדקסים כל x כזה. לכן הוכח ש-I_3 קבוצה סופית.

==

כשורה תכתונה, קיבלנו שהתנאי $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ מתקיים לכל האינדקסים אולי חוץ מקבוצה סופית של האינדקסים $I_1 \cup I_3$.

לכן $f(x_n) \to f(a)$ ו- f רציפה ב-a, מש"ל.

קומפקטיות

===========

תזכורת

<u>הגדרה</u>

1. אוסף תת קבוצות $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ של מרחב מטרי M נקרה <u>*כיסוי פתוח*</u> של המרחב אם $M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ ו-U_α פתוחה לכל $\alpha \in I$.
2. אטסף $\{U_\beta\}_{\beta \in J}$ נקרה <u>*תת כיסוי*</u> של כיסוי $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ אם $J \subseteq I$ ועדיין $M = \bigcup_{\beta \in J} U_\beta$.
3. כיסוי $\{U_\beta\}_{\beta \in J}$ נקרא <u>*סופי*</u> אם J קבוצה סופית.

<u>הגדרה</u> מרחב מטרי נקרא <u>*קומפקטי*</u> אם כל כיסוי פתוח שלו מכיל תת כיסוי סופי.

תרגיל

יהיו ρ_1,ρ_2 שתי מטריקות שקולות על M.

תוכיחו: (M,ρ_1) קומפקטי $\Leftrightarrow$ (M,ρ_2) קומפקטי.

הוכחה

האוסף של קבוצות פתוחות ביחס ל-ρ_1 זהה לאוסף של קבוצות פתוחות ביחס ל-ρ_2 לפי הגדרת מטריקות שקולות. לכן כיסוי פתוח ביחס ל-ρ_1 אם ורק אם הוא כיסוי פתוח ביחס ל-ρ_2 . אזי לפי הגדרת קומפקטיות:
(M,ρ_1) קומפקטי $\Leftrightarrow$ (M,ρ_2) קומפקטי, מצ"ל.

תרגיל

הגדרה. אומרים שאוסף קבוצות $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ מקיים את *תכונת החיתוך הסופי* אם לכל תת אוסף סופי $\{F_{\alpha_i}\}_{\alpha_i\in I,1\le i\le n}$ מתקיים: $\bigcap_{1\le i\le n} F_{\alpha_i}\neq\emptyset$.

יהי M מרחב מטרי . הוכיחו ש- M קומפקטי אם"ם לכל אוסף $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של תת קבוצות סגורת שלו המקיים תכונת החיתוך הסופי יש חיתוך לא ריק, במחלחם אחרות $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha\neq\emptyset$.

הוכחה

כיוון 1: נניח ש- M קומפקטי, $\{F_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אוסף קבוצות סגורות המקיים תחונת החיתוך הסופי ונניח בשלילה ש- $\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha=\emptyset$.
נביט באוסף תת קבוצות $\{F_\alpha^c\}_{\alpha\in I}$. כל F_α^c פתוחה . ולפי חוקי דה מורגן

$$\bigcup_{\alpha\in I} F_\alpha^c=\left(\bigcap_{\alpha\in I} F_\alpha\right)^c=\emptyset^c=M$$

ז"א ש- $\{F_\alpha^c\}_{\alpha\in I}$ ביסוי פתוח של M. מכיוון שהנחנן קומפקטיות מקבלים שקיימים $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in I$ כך ש- $\bigcup_{1\le i\le n}\{F_{\alpha_i}^c\}=M$. לכן (דה מורגן) $\bigcap_{1\le i\le n} F_{\alpha_i}=\left(\bigcup_{1\le i\le n}\{F_{\alpha_i}^c\}\right)^c=M^c=\emptyset$ $\Leftarrow$ סתירה.

כיוון 2: נניח שלכל אוסף של קבוצות סגורות המקיים תחונת החיתוך הסופי יש חיתוך לא ריק. נניח בשלילה ש- M אינו קומפקטי. אז יש כסוי פתוח $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כך שהוא לא מכיל שום תת כיסוי סופי. מזה נובע שכל תת אוסף סופי שלו $\{U_{\alpha_i}\}_{1\le i\le n}$ כאשר $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in I$ איננו כיסוי:

$\cup_{1\le i\le n}\left\{U_{\alpha_i}\right\}\neq M$. נסמן $F_\alpha = U_\alpha^c$. אזי כל F_α סגורות ומקיימות את תחונת החיתוך הסופי כי: $\emptyset = M^c \neq \left(\cup_{1\le i\le n}\left\{U_{\alpha_i}^c\right\}\right)^c = \cap_{1\le i\le n} F_{\alpha_i}$.
לפי ההנחה :$\cap_{\alpha\in I} F_\alpha \neq \emptyset$. לכן (דה מורגן)
$\cup_{\alpha\in I} U_\alpha = \cup_{\alpha\in I} F_\alpha^c = \left(\cap_{\alpha\in I} F_\alpha\right)^c \neq M$, ז"א, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ אחנו כיסוי של M. <u>סתירה.</u>

<u>תזכורת</u>.
<u>הגדרה</u>
יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של מרחב מטרי M. מספר ממשי $\delta > 0$ נקרא מספר לבג של הכיסוי אם לכל $x\in M$ קיים $\alpha_0\in I$ כך ש- $B(x,\delta)\subseteq U_{\alpha_0}$.