פתרון תרגיל לעבודה עצמית 8

שאלה 1

יהיו $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: AB הפיכה $\Leftrightarrow$ A הפיכה וגם B הפיכה.

פתרון

הערה

ראינו בהרצאה שאם $C,D\in\mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $CD=I$ אז $DC=I$ ו C,D מטריצות הפיכות.

$\Leftarrow$

נתון ש AB מטריצה הפיכה ולכן קיימת מטריצה C כך ש $C\left(AB\right)=\left(AB\right)C=I$.

מהאסוציאטיביות בכפל מטריצות נקבל ש $I=\left(AB\right)C=A\left(BC\right)$ ומההערה נקבל ש A הפיכה והמטריצה BC היא ההופכית שלה.

מהאסוציאטיביות בכפל מטריצות נקבל ש $I=C\left(AB\right)=\left(CA\right)B$ ומההערה נקבל ש A הפיכה והמטריצה BC היא ההופכית שלה.

$\Rightarrow$

נתון ש A הפיכה ולכן קיימת מטריצה A^{-1} כך $AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

נתון ש B הפיכה ולכן קיימת מטריצה B^{-1} כך $BB^{-1}=B^{-1}B=I$.

$$\left(AB\right)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=\left(A\left(BB^{-1}\right)\right)A^{-1}=\left(A\cdot I\right)\cdot A^{-1}=AA^{-1}=I$$

קיבלנו ש AB מטריצה הפיכה וההופכית שלה היא $B^{-1}A^{-1}$.

שאלה 2

יהיו $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\2&4&3\end{pmatrix}$ מצא שתי מטריצות הפיכות P,Q כך ש $B=PAQ$.

פתרון

נבצע פעולות עמודה אלמנטאריות עד שנקבל את המטריצה B.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&6\end{pmatrix}\overset{C_3-C_2\to C_3}{\approx}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\\3&4&2\end{pmatrix}\overset{C_1\leftrightarrow C_3}{\approx}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\2&4&3\end{pmatrix}$$

המטריצה האלמנטארית המתאימה לפעולת העמודה $C_3-C_2\to C_3$ היא

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

המטריצה האלמנטארית המתאימה לפעולת העמודה $C_1\leftrightarrow C_3$ היא

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

מכיוון שעבור פעולת עמודה אלמנטארית ρ ומטריצה כלשהי A מתקיים $\rho\left(A\right)=A\rho\left(I\right)$ נקבל ש

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&1\\3&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ואז

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\2&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&2\\2&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&4&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 3</u>

מצא את המטריצה ההופכית של המטריצה $\begin{pmatrix}2&3&4&5\\1&2&3&4\\1&1&2&3\\1&1&1&2\end{pmatrix}$.

<u>פתרון</u>

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}2&3&4&5&1&0&0&0\\1&2&3&4&0&1&0&0\\1&1&2&3&0&0&1&0\\1&1&1&2&0&0&0&1\end{array}\right)\overset{\substack{R_1-2R_2\to R_2\\R_1-2R_3\to R_3\\R_1-2R_4\to R_4}}{\approx}\left(\begin{array}{cccc|cccc}2&3&4&5&1&0&0&0\\0&-1&-2&-3&1&-2&0&0\\0&1&0&-1&1&0&-2&0\\0&1&2&1&1&0&0&-2\end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{R_2+R_3\to R_3\\R_2+R_4\to R_4}}{\approx}\left(\begin{array}{cccc|cccc}2&3&4&5&1&0&0&0\\0&-1&-2&-3&1&-2&0&0\\0&0&-2&-4&2&-2&-2&0\\0&0&0&-2&2&-2&0&-2\end{array}\right)\overset{\substack{-\frac{1}{2}R_4\to R_4\\-\frac{1}{2}R_3\to R_3\\-R_2\to R_2\\\frac{1}{2}R_1\to R_1}}{\approx}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1.5&2&2.5&0.5&0&0&0\\0&1&2&3&-1&2&0&0\\0&0&1&2&-1&1&1&0\\0&0&0&1&-1&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\overset{\substack{R_1-2.5R_4\to R_1\\R_2-3R_4\to R_2\\R_3-2R_4\to R_3}}{\approx}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1.5&2&0&3&-2.5&0&-2.5\\0&1&2&0&2&-1&0&-3\\0&0&1&0&1&-1&1&-2\\0&0&0&1&-1&1&0&1\end{array}\right)\overset{\substack{R_1-2R_3\to R_1\\R_2-2R_3\to R_2}}{\approx}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1.5&0&0&1&-0.5&-2&1.5\\0&1&0&0&0&1&-2&1\\0&0&1&0&1&-1&1&-2\\0&0&0&1&-1&1&0&1\end{array}\right)$$

$$\overset{R_1-1.5R_2\to R_1}{\approx}\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&1&-2&1&0\\0&1&0&0&0&1&-2&1\\0&0&1&0&1&-1&1&-2\\0&0&0&1&-1&1&0&1\end{array}\right)$$

<u>שאלה 4</u>

חשב את המכפלות הבאות או הסבר מדוע אינן מוגדרות:

א. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&0\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$

<u>פתרון</u>

א. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&2\\-1&1&6\end{pmatrix}$.

ב. מס' העמודות בשמאלית -2, מס' השורות בימנית – 3 לכן הכפל לא מוגדר.

ג. $\begin{pmatrix}1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&3\end{pmatrix}$

<u>שאלה 5</u>

א. הכפילו את המטריצות הבאות בשני הסדרים EF ו FE:

$$E=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&0&1\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&c&1\end{pmatrix}.$$

האם $EF=FE$?

ב. עבור A,B הבאים, חישבו את A^2,A^3,B^2,B^3 והעריכו מה תהיה התוצאה ל A^5,A^n,B^5,B^n:

$$A=\begin{pmatrix}2&2\\0&0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}.$$

<u>פתרון</u>

א.

$$EF=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&c&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&c&1\end{pmatrix}$$

$$FE=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&c&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\b+ac&c&1\end{pmatrix}$$

אם a=0 או c=0 אזי $EF=FE$ אחרת $EF\neq FE$

ב.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \begin{pmatrix} 2^5 & 2^5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 32 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = B^2 B = \begin{pmatrix} 1 & 2b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^5 = \begin{pmatrix} 1 & 5b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^n = \begin{pmatrix} 1 & nb \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$