קצת אינדוקציה

1) נגדיר את סדרת פיבונאצ'י כך:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \end{cases}$$

הוכיחו באינדוקציה שלכל $n \geq 0$ שלם מתקיים:

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>**פתרון:**</u>

שלב ראשון - בדיקה; נבדוק שהטענה נכונה עבור $n = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

שלב שני - הנחה; נניח שהטענה מתקיימת עבור $n = k$ כלומר:

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

שלב שלישי - הוכחה; נוכיח שהטענה מתקיימת עבור השלב הבא, כלומר עבור $n = k+1$.

לכן, צריך להוכיח:

$$\begin{pmatrix} a_{k+2} \\ a_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{k+1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

נתבונן ב:

$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{k+1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{k}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. לפי הנחת האינדוקציה,

$\begin{pmatrix}a_{k+1}\\a_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{k}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, ולכן:

$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{k+1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{k}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{k+1}\\a_k\end{pmatrix}$, ולפי כפל מטריצות נקבל ש:

$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{k+1}\\a_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{k+1}+a_k\\a_{k+1}\end{pmatrix}$. לפי הגדרת סדרת פיבונאצ'י, $a_k+a_{k+1}=a_{k+2}$, ולכן:

$\begin{pmatrix}a_{k+1}+a_k\\a_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{k+2}\\a_{k+1}\end{pmatrix}$, וסה"כ קיבלנו ש: $\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{k+1}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{k+2}\\a_{k+1}\end{pmatrix}$, והוכחנו את נכונות הטענה עבור $n=k+1$. סה"כ, הוכחנו את נכונות הטענה לכל $n\geq 0$ שלם.

2) תהי A קבוצה עם n איברים. הוכיחו באינדוקציה שבקבוצה $P(A)$ יש 2^n איברים.

<u>**פתרון:**</u>

בקבוצה יש מספר שלם אי-שלילי של איברים (אין קבוצה עם חצי איבר; אין קבוצה עם מספר שלילי של איברים), ולכן הבדיקה שלנו תחל ב - $n=0$.

שלב ראשון - בדיקה - נבדוק את נכונות הטענה עבור $n=0$:

אם בקבוצה A יש 0 איברים, $A=\phi$, ואז $P(A)=\{\phi\}$, ואכן בקבוצה $P(A)$ יש $2^0=1$ איברים. לכן הטענה נכונה עבור $n=0$.

שלב שני - הנחה - נניח שהטענה נכונה עבור $n=k$, כלומר אם A קבוצה עם k איברים אז בקבוצה $P(A)$ יש 2^k איברים.

שלב שלישי - הוכחה - נוכיח את נכונות הטענה עבור $n=k+1$, כלומר אם A קבוצה עם $k+1$ איברים, אז בקבוצה $P(A)$ יש 2^{k+1} איברים.

יהי $a\in A$ כלשהו, ונסתכל על הקבוצה A כך: $A=(A\setminus\{a\})\cup\{a\}$. כעת, $A\setminus\{a\}$ היא קבוצה עם k איברים. לפי הנחת האינדוקציה, יש בקבוצה $P(A\setminus\{a\})$ 2^k איברים.

מי הם איברי הקבוצה $P(A)$? תתי קבוצות של A. תת קבוצה של A או מכילה את $\{a\}$ או לא מכילה את $\{a\}$. כל תתי הקבוצות של A שלא מכילות את $\{a\}$ הן בדיוק תתי הקבוצות של $A\backslash\{a\}$, ולפי הנחת האינדוקציה (כמו שכבר ציינו) יש 2^k כאלה.

מצד שני, כל תתי הקבוצות של A שמכילות את $\{a\}$ הן מהצורה $B\cup\{a\}$, כאשר B היא תת קבוצה של $A\backslash\{a\}$. כמה קבוצות כאלה יש? שוב, כל הקבוצות B האלה הן תתי הקבוצות של $A\backslash\{a\}$, ויש 2^k כאלה, ולכן גם יש 2^k קבוצות מהצורה $B\cup\{a\}$, כלומר יש 2^k תתי קבוצות של A שמכילות את $\{a\}$.

כל תתי הקבוצות של A (הלא הן איברי $P(A)$) הן תתי הקבוצות שמכילות את $\{a\}$ ותתי הקבוצות שלא מכילות את $\{a\}$. לכן, סה"כ יש לקבוצה A: $2^k+2^k=2\cdot 2^k=2^{k+1}$ תתי קבוצות, כלומר בקבוצה $P(A)$ יש 2^{k+1} איברים, והוכחנו את הטענה עבור $n=k+1$.

לכן, הוכחנו את נכונות הטענה לכל $n\geq 0$ שלם.