

תרגילים על משטחים:

1. משטחי סיבוב.
 - א. חקרו את משטחי הסיבוב הבאים: מצא תבניות יסודיות, סימני קריסטופל, העתקת ויינגרטן, עקמומיות גאוס ועקמומיות חציובנית.
 - א. ספירה: $0 < t < \pi, \gamma(t) = (a \sin t, 0, a \cos t)$
 - ב. היפרבולואיד חד יריעתי: $-\infty < t < \infty, \gamma(t) = (\sqrt{t^2 + r}, 0, t)$

2. יהי משטח סגור (חסום ובלי שפה) $S \subseteq \mathbb{R}^3$. הוכיח שיש נקודה על המשטח עם עקמומיות גאוס חיובית:
 3. שאלה על נוסחאות
 - א. בטא את מקדמי כריסטופל Γ_{ij}^k באמצעות מקדמי המטריקה g_{ij} .
 - ב. הוכח שהביטוי $\frac{\partial}{\partial u^k} (\Gamma_{ij}^k X'_k + L_{ij} N)$ הוא סימטרי ביחס ל- j ו- k .
 - ג. מצא את היחס בין L_{ij} לבין L_i^k .
 - ד. הוכח שהביטוי $L_{ij} L_j^k$ הוא פנימי (הבא אותו במונחים של מקמי המטריקה, מקדמי כריסטופל, ו/או נגזרותיהם).
 - ה. הוכיחו שעקמומיות גאוס שווה ל- $-\frac{2}{g_{11}} L_{1[1} L_{2]}$.

4. תהי עקומה $\beta = X \circ \alpha$ על משטח פרמטריזציה X . נניח שלכל $t > 0$, הוקטור $\beta''(t)$ הוא פרפורציונלי לוקטור $X'_1 \times X'_2$. מצאו זוג משוואות דיפרנציאליות שמקיימות על ידי הרכיבים α^1, α^2 של α .

5. תהי עקומה $\gamma(t) = (f(t), 0, g(t))$ במהירות יחידה ($t_1 < t < t_2$) ויהי X משטח הסיבוב שלה.
 - א. הביאו את שטח המשטח לפי הפונקציה f .
 - ב. מצאו את השטח במקרה ש γ הוא מעגל ברדיוס β , שמרכזו מרוחק מרחק α מציר ה- z .

6. תהי פרמטריזציה $X(u, v)$ של משטח.
 - א. הגדר את העקמומיות הראשיות k_1, k_2 של פרמטריזציה.
 - ב. עם התבניות הראשונה והשנייה מקיימות $0 \equiv L_{12} \equiv g_{12}$, בחר בסיס מתאים והבא את העתקת ויינגרטן כמטריצה ריבועית.
 - ג. בתנאים של ב', הבאה את הגודל $\frac{k_1}{k_2}$ לפי האיברים של התבניות הראשונה והשנייה.
 - ד. חשב את $\frac{k_1}{k_2}$ עבור משטח הסיבוב של העקומה $y = 0, x = z^2 + \frac{1}{4}$.

7. עבור פונקציה $f(x, y) = \frac{a}{y}$, ותהי המטריקה $(dx^2 + dy^2)$ $f^2(x, y)$.
 - א. מצא תחום מקסימאלי $U \subseteq \mathbb{R}^2$ שבו מוגדרת המטריקה.
 - ב. חשב את מקדמי כריסטופל Γ_{ij}^k של המטריקה.
 - ג. הגדרת את אופרטור לפלס בטרמי למטריקה איזוטרמית.
 - ד. חשב את עקמומיות גאוס של המטריקה לפי מקדמי קריסטופל.
 - ה. חשב את עקמומיות גאוס של המטריקה לפי אופרטור לפלס בטרמי.
 - ו. כתוב את המשוואות הגאודזיות של המטריקה.

8. עבור פונקציה $f(x, y) = \left(1 + \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2)\right)^{-1}$, ותהי המטריקה $f^2(x, y)(dx^2 + dy^2)$.

- א. מצא תחום מקסימאלי $U \subseteq \mathbb{R}^2$ שבו מוגדרת המטריקה.
- ב. חשב את מקדמי כריסטופל Γ_{ij}^k של המטריקה.
- ג. תנו ארבעה שיטות לחישוב של עקמומיות גאוס של משטח.
- ד. הסבירו אילו מהשיטות יכולות לפעל פה.
- ה. חשב את עקמומיות Gauss של מטריקה $f^2(x, y)(dx^2 + dy^2)$.
- ו. כתוב את המשוואות הגאודזיות של המטריקה.