1207-3

הרצאה 3

מטריצות הפיכות

תזכורת: + חיבור מטריצות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

• כפל מטריצות $\quad n \times m, \; m \times r$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 2 \\ & \end{pmatrix}$$

$1,2$

$$2 \times 3 \qquad 3 \times 2$$

$$(AB)_{ij} := \sum_{k=1}^{m} A_{ik} B_{kj}$$

$$(AB)_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} + A_{13}B_{32}$$

<u>כפל מטריצה בוקטור / כפל וקטור במטריצה:</u>

$n \times m$

$$\begin{pmatrix} | & & | \\ C_1 & \cdots & C_m \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \begin{matrix} | \\ C_i \\ | \end{matrix}$$

$$(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \begin{pmatrix} - R_1 - \\ \vdots \\ - R_n - \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (- R_i -)$$

דוגמה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$3 \times \underbrace{2}_{} \qquad \underbrace{2}_{} \times 1 \qquad 3 \times 1$$

לפי הגדרה:

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$1 \times 3 \qquad 3 \times 2 \qquad 1 \times 2$$

לפי הגדרה:

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>כפל עמודה-עמודה וכפל שורה-שורה:</u>

$$\underset{n \times m}{A} \cdot \underset{m \times r}{B} = A \cdot \begin{pmatrix} | & & | \\ C_1(B) & \cdots & C_r(B) \\ | & & | \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} | & & | \\ A \cdot C_1(B) & \cdots & A \cdot C_r(B) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} — R_1(A) — \\ \vdots \\ — R_n(A) — \end{pmatrix} \cdot B =$$

$$= \begin{pmatrix} — R_1(A) \cdot B — \\ \vdots \\ — R_n(A) \cdot B — \end{pmatrix}$$

<u>דוגמה:</u>

נתונה מטריצה $n \times 3$: A.

כך ש:

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

מה ניתן לומר על <u>העמודות</u> של A?

כפל עמודה-עמודה:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | \\ \underbrace{A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} & A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} & A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

לכן:

$$\underbrace{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

לכן סכום כל העמודות:

נ.נ. [illegible]

$$1\cdot C_1(A) + 1\cdot C_2(A) + 1\cdot C_3(A) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

כלומר, סכום העמודות של A הוא וקטור האפס.

<u>הגדרה</u> – <u>מטריצה הפיכה</u> $(n\times n)$ A:

$$A\cdot B = B\cdot A = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad (= I_n)$$

קוראים ל- B: A^{-1}.

<u>אלג' גאוס</u>: $A \xrightarrow{\text{פעולות דירוג}}$ צורה קנונית

<u>משפט</u>: אם ρ פעולת דירוג, מתקיים:

$$\boxed{\rho(A) = \rho(I)\cdot A}$$

<u>דוגמה למשפט</u> -

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\rho:\ R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\rho(A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\rho(I)}_{\text{הפעלת } \rho \text{ על } I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(I)\cdot A = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\rho(I)} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}^{A} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho(A)$$

דרך למצוא מט' הופכית
של מט' הפיכה:

$$\rho_t\cdots\rho_1(A) = I$$

$$\rho_t(I)\cdots\rho_1(I)\cdot A = I$$

ולכן:

$$A^{-1} = \rho_t(I)\cdots\rho_1(I)$$

אלגוריתם היפוך מטריצה:

$$(A \mid I) \xrightarrow{\rho_1\cdots\rho_t} (I \mid \underbrace{?}_{A^{-1}})$$

$$\rho_t\cdots(\rho_2(\rho_1(I))) = \rho_t(I)\cdots\rho_1(I)$$

דוגמה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \leftarrow -R_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \leftarrow R_1 - 2R_3]{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_3}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\quad}_{I} \qquad \underbrace{\quad}_{A^{-1}}$$

<u>טענה:</u> במטריצה הפיכה אין שורת אפסים ואין עמודת אפסים.

<u>הוכחה:</u>
נניח כי A מט' ריבוע הפיכה. נניח בשלילה כי יש לה עמודת אפסים (נסמנה j):

$$A^{-1}\cdot\underbrace{\begin{array}{c}\begin{pmatrix} | & & | & & | \\ C_1(A) & \cdots & \begin{matrix}0\\0\\\vdots\\0\end{matrix} & \cdots & C_n(A) \\ | & & | & & | \end{pmatrix}\\ \quad j\end{array}}_{A} = I$$

לפי כפל עמודה עמודה, התוצאה היא:

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix} | & & & & | \\ A^{-1}\cdot C_1(A) & \cdots & A^{-1}\begin{bmatrix}0\\\vdots\\0\end{bmatrix} & \cdots & A^{-1}C_n(A) \\ | & & & & | \end{bmatrix}\\ \qquad\qquad j\end{array} = \begin{array}{c}\begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1\end{bmatrix}\\ \qquad j\end{array}$$

נשווה עמודה j-ית בצד שמאל לעמודה ה-j-ית בצד ימין:

$$\begin{bmatrix}0\\\vdots\\\vdots\\0\end{bmatrix} = A^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0\\\vdots\\\vdots\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\leftarrow j$$

וזאת סתירה. לכן, אין עמודת אפסים.

<u>אין שורת אפסים:</u>

הוכחה:

$$\begin{array}{r}\\ \text{ה-}i\text{-ית}\rightarrow\end{array}\begin{bmatrix} — & R_1(A) & — \\ & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \end{bmatrix}\cdot A^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ — R_n(A) — \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A}$$

ומשווים שורה i-ית לשורה i-ית:

$$\begin{pmatrix} \underline{0} & \vdots \end{pmatrix} [0 \cdots 0]\cdot A^{-1} = [0 — \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1} \cdots 0]$$

בסתירה.

מ.ש.ל.

<u>אזהרה:</u> בג לא תנאי מספיק להפיכות:
לא שורת אפסים ואין עמודת אפסים
אך הנ"ל לא הפיכה.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

<u>הערה:</u> מטריצות אלמנטריות (כלומר: $\rho(I)$ כאשר ρ פעולת-שורה) הן הפיכות.

<u>הוכחה:</u> ראינו בשיעור קודם שהפעולות הפיכות:

פעולה	הפעולה ההפוכה
$R_i \leftrightarrow R_j$	$R_i \leftrightarrow R_j$
$R_i \leftarrow \alpha R_i$	$R_i \leftarrow \alpha^{-1} R_i$
$R_i \leftarrow R_i + \alpha R_j$	$R_i \leftarrow R_i - \alpha R_j$

ולכן: $\rho(I)\cdot\rho^{-1}(I) = I$. מ.ש.ל.

<u>טענה:</u> מכפלה של מט' הפיכות היא הפיכה.

<u>הוכחה:</u> נניח כי A,B הפיכות. אזי

$$(AB)\cdot(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} =$$
$$= A\cdot I\cdot A^{-1} = AA^{-1} = I$$

וכנ"ל בכיוון השני: $(B^{-1}A^{-1})\cdot(AB) = I$.

כלומר:

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. מ.ש.ל.

<u>מסקנה:</u> דירוג שומר על הפיכות.

<u>הוכחה:</u> ראינו שדירוג שקול לכפל במט' אלמנטריות:

$$\rho(A) = \rho(I)\cdot A$$

וראינו ש-$\rho(I)$ הפיכה.
לכן, אם A הפיכה אז גם $\rho(A)$ הפיכה. מ.ש.ל.

<u>מסקנה:</u> אם A הפיכה ו-B שקולת שורה [השגנו מ-A ל-B באמצעות פעולות דירוג], אז ב-B אין שורת אפסים ואין עמודת אפסים.

[הסבר: A הפיכה $\Leftarrow$ B הפיכה,
B הפיכה $\Leftarrow$ אין שורת/עמודת אפסים.]

<u>מטריצות מיוחדות</u> [מט' ריבועיות]

(1) <u>מטריצה סקלרית:</u>

$$\begin{bmatrix} \alpha & & 0 \\ & \alpha & \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha \end{bmatrix} = \alpha\cdot I$$

• סכום של סקלריות – מט' סקלרית
• מכפלה של סקלריות – מט' סקלרית

(דוגמה: $\begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ \dots \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 17 \end{bmatrix}$

· הפיכה אם״ם $\alpha \neq 0$,
$(\alpha I \cdot \alpha^{-1} I = I)$

$$(\alpha I)(\beta I) = \alpha\beta \cdot I$$

② מטריצות אלכסוניות:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & & & 0 \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

למשל:
$$\begin{bmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 26 \end{bmatrix}$$

· סכום של אלכסוניות - אלכסונית.
· מכפלה של אלכסוניות - אלכסונית

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n\beta_n \end{pmatrix}$$

· הפיכה אם״ם $\alpha_1, \dots, \alpha_n \neq 0$

ⓐ אם $\exists i : \alpha_i = 0$ אז ∃ שורת אפסים (עמ' אפסים) ⇐ לא הפיכה.
ⓑ אם $\forall i : \alpha_i \neq 0$ ניתן לבצע $\underbrace{(R_i \leftarrow \alpha_i^{-1} R_i)}$ ולקבל I.

לדוגמה:
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow 4^{-1}R_3]{R_1 \leftarrow 2^{-1}R_1,\ R_2 \leftarrow 3^{-1}R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

③ מטריצות משולשות: (עליונות ותחתונות)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$
אפסים.

$$\Big\Downarrow T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & & * \\ 0 & \ddots & \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots\ 0 & * \end{bmatrix}$$
משולשית עליונה:

מחליף T

$$\begin{bmatrix} * & & 0 \\ & & \end{bmatrix}$$
משולשית תחתונה:

$[3\ 5\ 6]$

$$\begin{bmatrix} * & \\ & * \end{bmatrix}$$

• סכום של משולשיות עליונות – משולשית עליונה. [רק למתעניינים...]

• מכפלה של — " — — " — .

<u>הגדרה פורמלית</u> [של משולשית עליונה]:

$$A_{ij}=0 \quad \forall\ i>j$$

[= מה שמתחת לאלכסון הראשי]

למה:

נניח A,B משולשיות עליונות:

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj} = \sum 0 B_{kj} + \sum A_{ik}\cdot 0 = 0$$

נניח $\underline{i>j}$:

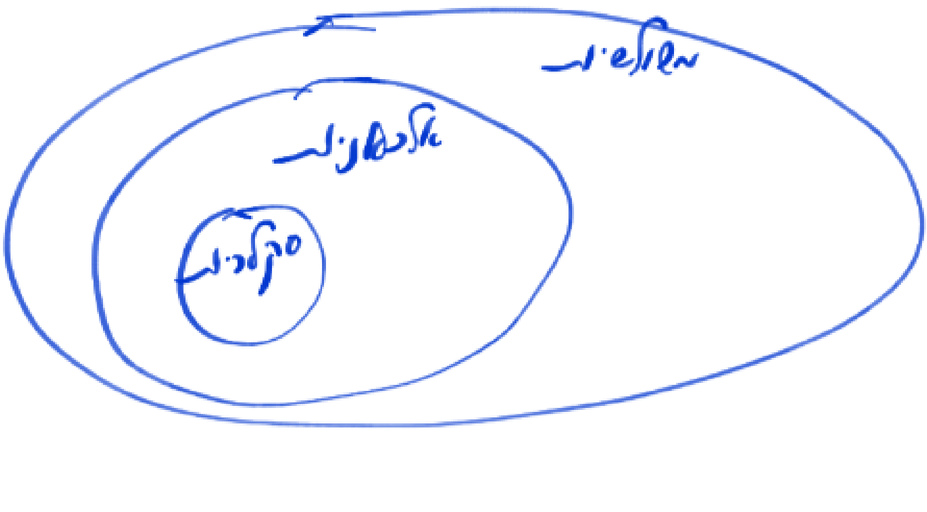
לכל k – או $i>k$, ואז $A_{ik}=0$ (כי A משולשית)

או $\underline{i\le k} \xRightarrow{j<i} j<k$

ואז $B_{kj}=0$, כי B משולשית.

מ.ש.ל.

<u>הערה:</u>



$11^{\underline{00}}$

• הפיכות של מט' משולשיות:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{bmatrix} \text{ הפיכה } \iff \alpha_1, \dots, \alpha_n \neq 0$$

<u>הוכחה:</u>

$(\Rightarrow)$: נבצע:

$$R_1 \leftarrow \alpha_1^{-1} R_1$$
$$\vdots$$
$$R_n \leftarrow \alpha_n^{-1} R_n$$

ונקבל:

$$\begin{bmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

ועכשיו נשתמש בכל ה-1-ים באלכסון ע"מ לאפס את יתר המטריצה. נקבל כי תוצאת הדירוג היא I, לכן A הפיכה.

$(\Leftarrow)$: נניח כי A הפיכה, ונניח בשלילה כי $\exists i\ \alpha_i = 0$. נתבונן ב-i הגדול ביותר כך ש- $\alpha_i = 0$:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & * & & \\ & & \alpha_{i-1} & & & & \\ & & & 0 & * & \cdots & * \\ & & & & \alpha_{i+1} & & \vdots \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

$\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n \neq 0$.

אם $i = n$, קיבלנו כי השורה התחתונה היא שורת אפסים, ולכן A לא הפיכה, בסתירה.

אם $i < n$, נעזר ב- $\alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n$. נקבל:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & & * \\ & \ddots & \end{bmatrix}$$

השורה ה-i-ית

$$
\begin{array}{c}
\qquad\qquad\qquad i-1 \\
\left[\begin{array}{cccccccc}
0 & \cdots & 0 & 0 & * & \cdots & * \\
 & & & & 1 & \cdots & * \\
 & O & & & & \ddots & \vdots \\
 & & & & & & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

נעזר ב-1-ים הפותרים שאחרי i כדי לאפס את השורה ה-i-ית.

$$R_i \leftarrow R_i - a_{i+1}R_{i+1}$$
$$R_i \leftarrow R_i - a_{i+2}R_{i+2}$$
$$\cdots$$
$$R_i \leftarrow R_i - a_n R_n$$

[כאשר בכל שלב a_{i+k} $(1 \leq k \leq n-i)$ הוא האבר ה-$(i, i+k)$-י של המטריצה העדכני.]

קיבלנו מט' שקולת שורה ל-A שיש בה שורת אפסים, לכן A לא הפיכה, סתירה.

לכן, $\forall i,\ \alpha_i \neq 0$. מ.ש.ל.

<u>הערה:</u> A הפיכה $\iff$ A^T הפיכה

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

לכן, אם A משולשית <u>תחתונה</u>, היא הפיכה אם"ם A^T הפיכה, אבל היא משולשית <u>עליונה</u>.

<u>הערה:</u> במט' כללית, האלכסון אינו מרמז דבר על הפיכות.

המט':

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$ לא הפיכה.

דוגמה: [illegible]

[illegible]

הפיכה. $A_t = \begin{pmatrix} t & 1 & -1 \\ 0 & t & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

__פתרון:__ נדרג:

$$A_t \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 \\ t & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & -1 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - tR_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - tR_2}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1+t \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה משולשית עליונה. לכן A_t הפיכה אם"ם $t \neq -1$.

__דוגמה:__ האם ייתכן כי המטריצות הבאות שקולות שורה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ?$$

__פתרון:__ לא.

הימנית: משולשית תחתונה ואלכסונה $\neq 0$ $\Leftarrow$ הפיכה.
השמאלית: מכילה שורת אפסים $\Rightarrow$ לא הפיכה.

מכיוון שהפיכות נשמרת תחת שקילות שורה, לא ייתכן כי שקולות.

__משפט:__ תהא A מטריצה ריבועית. TFAE הבא׳ (התנאים הבאים שקולים):

(i) A הפיכה.

(ii) הצורה המדורגת הקנונית של A היא I.

(iii) לכל $\underline{b}$ יש פתרון יחיד למע' $A\underline{x}=\underline{b}$.

(iv) לא קיים פתרון לא-טריוויאלי למע' ההומוגנית $A\underline{x}=\underline{0}$.

(v) כל מט' שקולת שורה ל-A אין שורת אפסים וגם אין עמודת אפסים.

(פתרון טריוויאלי של המע' ההומוגנית הוא $\underline{x}=0$.)

<u>הוכחה:</u>

(ii) $\Rightarrow$ (i): דירוג שומר על הפיכות. לכן אם I ש"ש (שקולת שורה) ל-A, מאחר ש-I הפיכה, גם A הפיכה.

(i) $\Rightarrow$ (iii): נתון כי A הפיכה. נתבונן ב- $A\underline{x}=\underline{b}$.
אזי:

$$\underline{x} = I\cdot\underline{x} = A^{-1}A\cdot\underline{x} = A^{-1}\underline{b},$$

זהו הפתרון היחיד.

(iii) $\Rightarrow$ (iv): בפרט, עבור $\underline{b}=0$.

(iv) $\Rightarrow$ (v): נניח כי אין פתרון לא-טריוויאלי למע' ההומוגנית $A\underline{x}=0$ ונוכיח כי לכל מט' ש"ש ל-A אין שורת/עמודת אפסים.

נניח בשלילה שיש עמודת אפסים, העמודה ה-j-ית:
במט' B שהיא שקולת שורה ל-A

$$B = \begin{bmatrix} | & & | & & | \\ c_1(B) & \cdots & \underbrace{\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix}}_{j} & \cdots & c_n(B) \\ | & & | & & | \end{bmatrix}$$

מתקיים: $B\cdot\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$ (בקלות כפל מט' בעמודה).

$$B\cdot\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}^{j} = 0\cdot \cancel{C_1(B)}+\cdots+1\cdot C_j(B)+\cdots+0\cdot\cancel{C_n(B)} =$$

$$= C_j(B) = \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}$$

פירושו שקיבלנו פתרון לא טריוויאלי למע' ההומוגנית $B\underline{x}=\underline{0}$. $\left(x=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\right)$

אבל A ו-B שקולות ולכן גם ל-A יש פתרון לא טריוויאלי, סתירה.

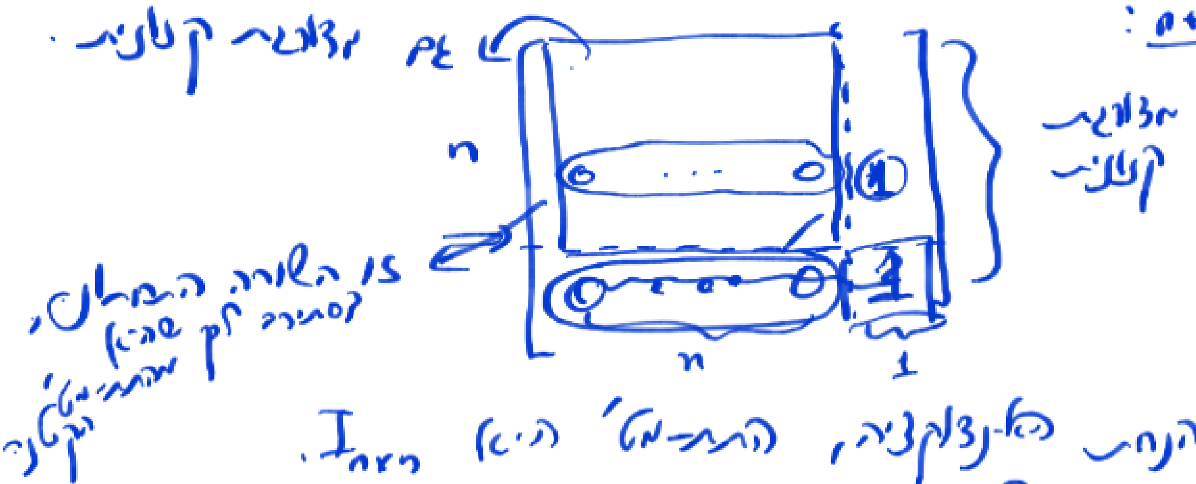
* צריך להראות ש-B אין גם שורת אפסים.

(v) ⇐ (ii): נתונה מט' A שבצורה שקולה אין שורת/עמודת אפסים. צ"ל: $\underline{A \sim I}$ (הצורה הקנונית שלה $= I$).

נסמן ב-B את הצורה המדורגת הקנונית של A.
בהרח, ב-B אין שורת אפסים ואין עמודת אפסים.
נוכיח באינדוקציה [על n] שצורה קנונית בלי שורת/עמודת אפסים היא בהכרח I_n.

$\underline{n=1}$: ברור $[1] = I_{1\times1}$.

$\underline{n+1}$:

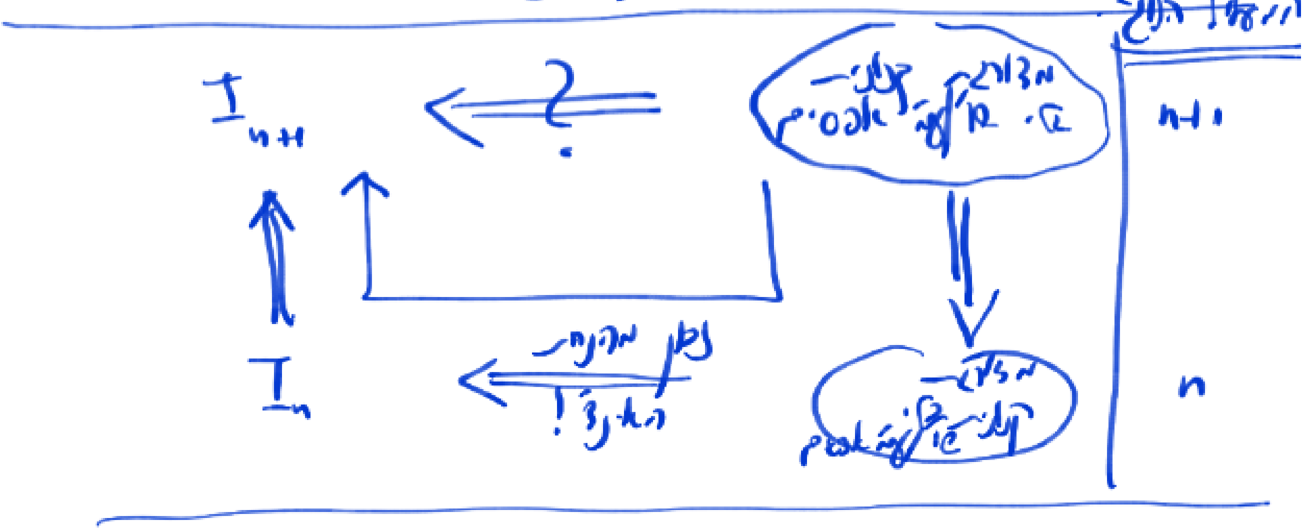


מהנחת האינדוקציה, התת-מט' היא מאוחה I_n.
המט' המקבלת היא:

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0 & \cdots & 0\end{matrix} & 1 \end{array}\right) = I_{(n+1)\times(n+1)}$$

ה.ח. הכללי: מטריצות בגודל בלי שורת/עמודת אפסים מגודל $n\times n$

שווה למט' הזהות.



<u>דוגמה:</u> לאלו ערכי $t\in\mathbb{R}$ יש פתרון למע':

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & t & 1 \\ -1 & 0 & t \\ t+1 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b}$$

<u>פתרון:</u> אם A הפיכה $\Leftarrow$ יש פתרון (יחיד).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & t & 1 & 0 \\ -1 & 0 & t & 1 \\ t+1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 \leftrightarrow R_3]{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & t & 1 \\ t+1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & t & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftarrow -R_1}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -t & -1 \\ t+1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & t & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2-(t+1)R_1}$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -t & -1 \\ 0 & 1 & t^2+t-1 & t+3 \\ 0 & t & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3-tR_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -t & -1 \\ 0 & 1 & t^2+t-1 & t+3 \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & \underbrace{-t^3-t^2+t+1} & -t(t+3) \end{array}\right]$$

מט' 3 משולשת עליונה ולכן הפיכה $\Longleftrightarrow$ $t^3+t^2-t-1 \neq 0$

אם היא הפיכה, קיים פתרון יחיד.

$$\Downarrow$$

$$t^2(t+1) - 1\cdot(t+1) = (t+1)^2(t-1)$$

היא הפיכה אמ"מ $t \neq \pm 1$.

לכן: ל- $t \neq \pm 1$ $\Leftarrow$ יש פתרון.

<u>$t = \pm 1$</u>: מדרגים ומקבלים שורת סתירה:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -t & -1 \\ 0 & 1 & t^2+t-1 & t+3 \\ 0 & 0 & 0 & -t(t+3) \neq 0 \end{array}\right]$$

לסיכום:

יש פתרון יחיד $\Longleftrightarrow$ $t \neq \pm 1$.

<u>דוגמה</u>: אילו ביקשתי למצוא מתי יש פתרון ל- ?

$$A\underline{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{b} \quad ?$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2-(t+1) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2-(t+1) \\ -t(2-(t+1)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -t+1 \\ t^2-t \end{bmatrix}$$

הפעלת הפעולות על b

ה... מדרגים.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -t & 1 \\ 0 & 1 & t^2+t-1 & -t+1 \\ 0 & 0 & -t^3-t^2+t+1 & t^2-t \end{array}\right]$$

$t \neq \pm 1 \Rightarrow$ הפיכה $\longrightarrow$ יש פתרון.

$t = \pm 1 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow$ שורת סתירה.

$t = 1 \Rightarrow$

חופשי

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

היא צורה מדורגת קנונית, ולכן הפתרון הכללי:

$x_3 = \alpha$

$x_2 = 0 - x_3 = -\alpha$

$x_1 = 1 + x_3 = 1 + \alpha$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1+\alpha, -\alpha, \alpha) =$$

$$= (1,0,0) + \alpha \cdot (1,-1,1)$$

דוגמה: מצאו וקטור $\underline{b}$ עבורו אין פתרון למערכת:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} = \underline{b}.$$

פתרון: המטריצה איננה הפיכה [אחרת, לכל $\underline{b}$ היה פתרון].

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 & b_1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b_3 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & b_4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_4]{R_1 \leftrightarrow R_2,\ R_2 \leftrightarrow R_4}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & b_2 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & b_4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_1}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & b_4+b_2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_2}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & b_4+b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1-b_2-b_4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right]$$

למשל אם ניקח $b_4 \neq b_1 - b_2$, נקבל שאין פתרון
כנדרש.

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

נראה בפעם הבאה:

A הפיכה $\iff$ $\forall \underline{b}$ $A\underline{x} = \underline{b}$ יש פתרון יחיד.

יחיד

$\forall b$ יש פתרון $A\underline{x}=\underline{b}$ $\Longleftarrow$ הפיכה A $\Longleftrightarrow$

---

* חוק משפט.