מבחן לינארית 1 קיץ תשפ"ב מועד א'

24.8.2022

מרצים: גיא בלשר, אריאל ויצמן, אלעד עטייא, ארז שיינר.
מתרגלים: שחר חנניה, נעה כהן, כנה נהיר, גלעד פורת־קורן, עידו פלדמן, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל.

הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- משך המבחן: שלוש שעות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי – מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- יש לכתוב בכל תשובה פתרון מלא ומפורט.
- סך הנקודות במבחן הוא 110. ציון מעל 100 יעוגל ל-100.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תיבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

1. (14 נק') יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$, ויהי W תת־מרחב בעל בסיס $\{v_1, v_2\}$.

(א) הוכיחו כי לכל $w \in W$ מתקיים $W = \{tv_1 + sv_2 + w \,|\, t, s \in \mathbb{F}\}$.

(ב) יהי $v \in V$. הוכיחו שאם $\{tv_1 + sv_2 + v \,|\, t, s \in \mathbb{F}\}$ הוא תת־מרחב של V, אז בהכרח $v \in W$.

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___

2. (30 נק') נתבונן בתת־הקבוצות הבאות של $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} t+1 & t+2s-1 \\ -s+1 & t-s+2 \end{pmatrix} \middle| \, t,s \in \mathbb{R} \right\}$$
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \middle| \begin{matrix} a-2b+c+d=0 \\ a=d \end{matrix} \right\}$$

(א) הוכיחו כי U הוא תת־מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(ב) מצאו בסיס ומימד ל-U ול-W.

(ג) מצאו בסיס ומימד ל-$U+W$ ול-$U\cap W$.

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___

3. (30 נק')

(א) לאילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ קיימת העתקה לינארית $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת

$$T\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} -a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 4 \\ a \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 1 \end{pmatrix}?$$

(ב) לאילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ קיימת העתקה לינארית $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת את תנאי סעיף א' שאינה חח"ע?

(ג) לאילו ערכי $a \in \mathbb{R}$ קיימת העתקה לינארית $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת את תנאי סעיף א' וגם

$$\ker T = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}?$$

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___

4. (15 נק') תהיינה $A \in \mathbb{R}^{6\times 7}$ ו-$B \in \mathbb{R}^{7\times 6}$ מטריצות כך ש-AB הפיכה.

(א) (8 נק') הוכיחו כי הדרגה של BA היא 6.

(ב) (7 נק') עוד נתון כי

$$BA\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & -2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

מצאו בסיס עבור $N(BA)$.

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___

5. (21 נק') יהי V מרחב וקטורי ממימד n מעל $\mathbb{R}$, ותהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית. <u>הוכיחו או הפריכו</u> כל אחת מהטענות הבאות:

(א) אם קיימים בסיסים סדורים B, C של V שעבורם $([T]_C^B)^2 = 0$, אז $T^2 = 0$. (תזכורת: $T^2 = T \circ T$)

(ב) קיימים בסיסים סדורים B, C של V שעבורם $[T]_C^B$ אלכסונית.

(ג) אם לכל שני בסיסים סדורים B, C של V מתקיים $([T]_C^B)^2 = 0$, אז $T = 0$.

דף נוסף לשאלה מספר ___

דף נוסף לשאלה מספר ___