תרגיל

תהי $r(u,v):(0,2\pi)\times(-\infty,\infty)\to\mathbb{R}^3$ המפה המוגדרת ע"י $\gamma(u,v)=(\cos u,\sin u,v)$,
ותהי $\gamma:[a,b]\to U$ עקומה.

נגדיר עקומה נוספת ρ על הגליל $M=\left\{x^2+y^2=1\right\}$ ע"י $\rho(t)=r(\gamma(t))$.
הוכיחו שאורך העקומה ρ שווה לאורך העקומה γ.

פתרון

בצורה פרמטרית, $\gamma(t)=(u)$

$$L[\gamma]=\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t=\int_a^b\sqrt{(u'(t))^2+(v'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

מצד שני

$$\rho(t)=r(\gamma(t))=r(u(t),v(t))=(\cos u(t),\sin u(t),v(t))$$

$$\rho'(t)=(-\sin u(t)\cdot u'(t),\cos u(t)\cdot u'(t),v'(t))$$

$$\|\rho'(t)\|=\sqrt{\sin^2 u(t)\cdot[u'(t)]^2+\cos^2 u(t)\cdot[u'(t)]^2+(v'(t))^2}=$$

$$=\sqrt{(u'(t))^2+(u'(t))^2}=\|\gamma'(t)\|$$

$$\implies\int_a^b\|\rho'(t)\|\,\mathrm{d}t\equiv\int_a^b\|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t$$

$$L[\rho]=L[\gamma]$$

שאלה

האם לγ ולρ גם אותה עקמומיות?

תשובה

לא בהכרח. קווים ישרים מהסוג $v=\mathrm{const}$ עם עקמומיות 0 עוברים למעגלים על הגליל(כמעט מעגל)שלהם עקמומיות 0 עוברים למעגלים על הגליל(כמעט מעגל) שלהם עקמומיות 1.

יהי M משטח. אם יש בידינו את (g_{ij}) ניתן לחשב אורכים של עקמומיות מהסוג $\rho=r\circ\gamma$ ע"י:

$$\int_a^b\sqrt{\underbrace{\gamma'(t)^T}_{\substack{\text{row}\\ \text{vector}}}(g_{ij})\cdot\underbrace{\gamma'(t)}_{\substack{\text{column}\\ \text{vector}}}}\,\mathrm{d}t=\int_a^b\sqrt{\underbrace{g_{ij}\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\gamma^j}{\mathrm{d}t}}_{\text{Einstein notation}}}\,\mathrm{d}t$$

נרשום:

$$\gamma(t)=\begin{pmatrix}\gamma^1(t)\\ \gamma^2(t)\end{pmatrix}\qquad \gamma'(t)=\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\gamma^1}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}\gamma^2}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}$$

$$g_{11}=\left\langle\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial u}\right\rangle\qquad g_{12}=\left\langle\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right\rangle=g_{21}\qquad g_{22}=\left\langle\frac{\partial r}{\partial v},\frac{\partial r}{\partial v}\right\rangle$$

$$\gamma'(t)^T\cdot(g_{ij})\cdot\gamma'(t)=\left(\frac{\mathrm{d}\gamma^1}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}\gamma^2}{\mathrm{d}t}\right)\begin{pmatrix}g_{11}&g_{12}\\ g_{21}&g_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}\gamma^1}{\mathrm{d}t}\\ \frac{\mathrm{d}\gamma^2}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}=\left(\frac{\mathrm{d}\gamma^1}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}\gamma^2}{\mathrm{d}t}\right)\begin{pmatrix}g_{11}\frac{\mathrm{d}\gamma^1}{\mathrm{d}t}+g_{12}\frac{\mathrm{d}\gamma^2}{\mathrm{d}t}\\ g_{21}\frac{\mathrm{d}\gamma^1}{\mathrm{d}t}+g_{22}\frac{\mathrm{d}\gamma^2}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}=$$

$$=g_{11}\frac{\mathrm{d}\gamma^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\gamma^1}{\mathrm{d}t}+g_{12}\frac{\mathrm{d}\gamma^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\gamma^2}{\mathrm{d}t}+g_{21}\frac{\mathrm{d}\gamma^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\gamma^1}{\mathrm{d}t}+g_{22}\frac{\mathrm{d}\gamma^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\gamma^2}{\mathrm{d}t}=\cdots$$

ובסימון איינשטיין ניתן לכתוב:

$$\cdots=g_{ij}\frac{\mathrm{d}\gamma^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\gamma^j}{\mathrm{d}t}$$

בנוסף, אם r מעתיקה תחום $D\subseteq U$ אל $\tilde{D}\subseteq M$, אפשר לחשב את השטח של $\tilde{D}$ ע"י

$$A=\iint\limits_D\sqrt{\det(g_{ij})}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

תרגיל

נתון התחום $U=\left\{(u,v)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;\begin{array}{l}0<u<2\pi\\ 0<v<2\pi\end{array}\right\}$, $\alpha(t)=(t,t)$ עקומה בU עבור $0<t<2\pi$.

א. מהו אורך העקומה $\alpha(t)$ בU?

ב. משטח M נתון ע"י פרמטריזציה $r:U\to\mathbb{R}^3$, $r(u,v)=(u\cos v,u\sin v,v)$. מהו אורך העקומה $\rho=r\circ\alpha$?

ג. נניח שנחליף את המטריקה (g_{ij}) בסעיף א' מ$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ ל$\begin{pmatrix}2e^{2u}&0\\0&2e^{2v}\end{pmatrix}$. מהו אורך העקומה $\alpha(t)$ בU עם מטריקה זו?

פתרון

א. ע"פ פיתגורס $L[\alpha]=\sqrt{2}\cdot 2\pi$

פתרון נוסף באמצעות (g_{ij}), המטריקה של U. צריכים פרמטריזציה של U:

$$\gamma(u,v)=(u,v)\qquad \begin{array}{l}0<u<2\pi\\ 0<v<2\pi\end{array}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial u}=(1,0)\qquad\frac{\partial\gamma}{\partial v}=(0,1)$$

$$g_{11}=\langle(1,0),(1,0)\rangle=1\qquad g_{12}=0=g_{21}\qquad g_{22}=1$$

$$(g_{ij})=I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$L[\alpha]=\int_0^{2\pi}\sqrt{g_{ij}\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}}}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{g_{11}\frac{\mathrm{d}\alpha^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\alpha^1}{\mathrm{d}dt}+\cancel{g_{12}(\cdots)}+\cancel{g_{21}(\cdots)}+g_{22}\frac{\mathrm{d}\alpha^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\alpha^2}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t=$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+1}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\cdot 2\pi$$

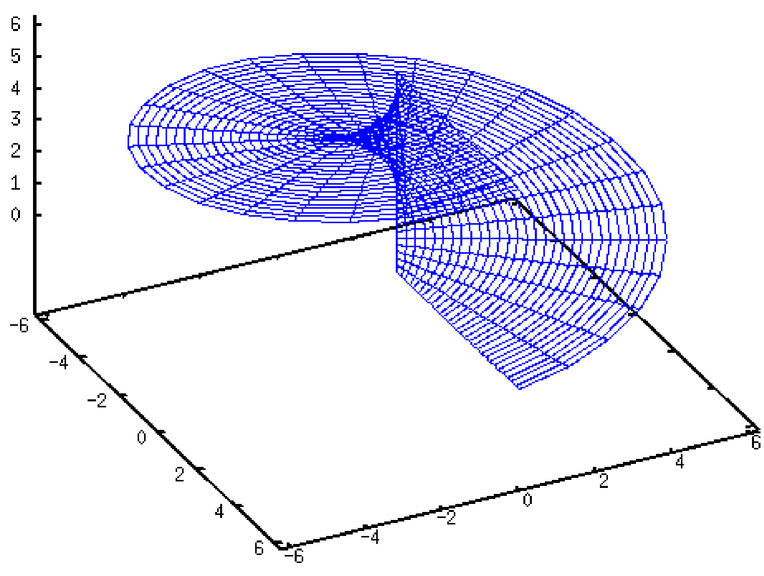
ב. כיצד M נראה?

$$\gamma(u,v)=(u\cos v,u\sin v,v)\qquad\begin{array}{l}0<u<2\pi\\0<v<2\pi\end{array}$$

אם u קבוע, מקבלים סליל ברדיוס u:

הצורה הזאת נקרא הליקויד:

$$\rho(t)=r(\alpha(t))=\gamma(t,t)=(t\cos t,t\sin t,t)\qquad 0<t<2\pi$$



נמצא את $L[\rho]$ בשתי דרכים:

א. חישוב ישיר:

$$\rho'\left(t\right)=\left(\cos t-\sin t,\sin t+t\cos t,1\right)$$

$$\left\Vert \rho'\left(t\right)\right\Vert =\sqrt{\cos^{2}t-\cancel{2t\cos t\sin t}+t^{2}\sin^{2}t+\sin^{2}t+\cancel{2t\cos t\sin t}+t^{2}\cos^{2}t+1}=\sqrt{t^{2}+2}$$

$$L\left[\rho\right]=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{t^{2}+2}\,\mathrm{d}t=\cdots$$

$$t=\sqrt{2}\cdot\sinh\theta\qquad\mathrm{d}t=\sqrt{2}\cosh\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$t^{2}=2\sinh^{2}\theta$$

$$t^{2}+2=2\left[\sinh^{2}\theta+1\right]=2\cosh^{2}\theta$$

הגבול העליון של האינטגרל מתאים ל$t=2\pi$. מה הθ המתאים?

$$t=\sqrt{2}\sinh\theta\qquad\frac{t}{\sqrt{2}}=\sinh\theta\qquad\theta=\text{arcsinh}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

ולכן הגבול העליון הוא $\text{archsinh}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\right)$, והאינטגרל הוא:

$$\cdots=2\int_{0}^{\text{archsinh}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\right)}\cosh^{2}\theta\,\mathrm{d}\theta=\cdots$$

מה זה $\cosh^{2}$?

$$\cosh\theta=\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}$$

$$\cosh^{2}\theta=\left(\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}\right)=\frac{1}{4}\left(e^{\theta}+e^{-\theta}\right)^{2}=\frac{1}{4}\left(e^{2\theta}+e^{-2\theta}\right)=\frac{2}{4}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{2\theta}+e^{-2\theta}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}e\cosh2\theta+\frac{1}{2}$$

נמשיך את פתרון האינטגרל:

$$\cdots=\int_{\cdots}^{\cdots}\left(\cosh2\theta+1\right)\,\mathrm{d}\theta=\frac{\sinh2\theta}{2}+\theta\Big|_{\theta=0}^{\theta=\text{arcsinh}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\right)}=$$

$$=\frac{\sinh\left(2\text{arcsinh}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\right)\right)}{2}+\text{archsinh}\left(\frac{2\pi}{\sqrt{2}}\right)\approx22.43$$

ב. דרך שנייה - באמצעות (g_{ij}):
נחשב נגזרות חלקיות:

$$\frac{\partial r}{\partial u} = (\cos v, \sin v, 0) \qquad \frac{\partial r}{\partial v} = (-u\sin v, u\cos v, 1)$$

$$g_{11} = 1 \qquad g_{12} = g_{21} = 0 \qquad g_{22} = u^2 + 1$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+1 \end{pmatrix}$$

$$L[\rho] = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{ij}\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\alpha^j}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t$$

$$\alpha(t) = \left(\overbrace{t}^{u}, \overbrace{t}^{v}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{g_{11}\cdot 1\cdot 1 + \cancel{g_{12}(\cdots)} + \cancel{g_{21}(\cdots)} + g_{22}\cdot 1\cdot 1} = \int \sqrt{(t^1+1)+1}\,\mathrm{d}t$$

ומכאן ממשיכים אותו דבר

ג. עכשיו במקום $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ נשתמש ב $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2e^{2u} & 0 \\ 0 & 2e^{2v} \end{pmatrix}$

$$(g_{ij})|_{\alpha} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & 0 \\ 0 & 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$L[\alpha] = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{ij}\frac{\mathrm{d}\alpha^i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\alpha^j}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{11}\frac{\mathrm{d}\alpha^1}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\alpha^1}{\mathrm{d}t} + \cancel{g_{12}(\cdots)} + \cancel{g_{21}(\cdots)} + g_{22}\frac{\mathrm{d}\alpha^2}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\alpha^2}{\mathrm{d}t}}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2e^{2t}\cdot 1\cdot 1 + 2e^{2t}\cdot 1\cdot 1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{4e^{2t}}\,\mathrm{d}t =$$

$$\int_0^{2\pi} 2e^t\,\mathrm{d}t = 2e^t\Big|_{t=0}^{t=2\pi} = \boxed{2\left(e^{2\pi}-1\right)}$$