פתרון בוחן בקורס שדות ותורת גלואה
88-311 סמסטר א' תשפ"ב

ג' טבת תשפ"ב, 7.12.2021

מרצה: פרופ' בוריס קוניאבסקי

מתרגל: גיא בלשר

הוראות: יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק. נא לכתוב בעט כחול או שחור.
כתבו את תשובותיכם במחברת הבחינה. התחילו את התשובה לכל שאלה בעמוד נפרד, וציינו בתחילת כל עמוד את מספר השאלה המתאימה.
משך הבוחן: 90 דקות.
סך הנקודות עולה על 100, אך הציון המקסימלי בבוחן הינו 100.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

בהצלחה!

שאלה 1. נתבונן בפולינום $f(x) = x^3 - 5x^2 - 2x + 5$ מעל $\mathbb{Q}$, ויהי $\alpha \in \mathbb{C}$ שורש שלו.

א. חשבו את $n = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$. (15 נק')

ב. הביעו את ההופכי של $\alpha^2 - 1$ כצירוף לינארי של $1, \dots, \alpha^{n-1}$ מעל $\mathbb{Q}$. (25 נק')

פתרון.

א. נראה שהפולינום f אי-פריק. כיוון שהוא ממעלה 3, מספיק לבדוק האם יש לו שורשים ב-$\mathbb{Q}$. לפי טענה שראינו, אם שבר מצומצם $\frac{q}{r}$ הוא שורש של f, אז $q \mid 5$ ו-$r \mid 1$. לכן $\frac{q}{r} \in \{\pm 1, \pm 5\}$. הצבה ישירה מראה שאף אחד מהם אינו שורש של f, ולכן f אי-פריק מעל $\mathbb{Q}$. מכאן נסיק ש-f הוא הפולינום המינימלי של α, ולכן $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = \deg f = 3$.
דרך נוספת: אפשר להשתמש בשיטת הרדוקציה. מודולו 2, הפולינום הופך להיות $\overline{f}(x) = x^3 + x + 1$. זהו פולינום ממעלה 3 ללא שורשים, ולכן הוא אי-פריק מעל $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. כיוון ש-$\deg \overline{f} = \deg f$, נקבל ש-$f$ אי-פריק מעל $\mathbb{Q}$.

ב. נזכיר את דרך מציאת ההופכי: כיוון ש-$\mathbb{Q}(\alpha) \cong \mathbb{Q}[x]/\langle f(x) \rangle$, כדי למצוא את ההופכי של $\alpha^2 - 1$ צריך לחשב את מקדמי ה-gcd של הפולינום $f(x)$ עם $g(x) = x^2 - 1$. ניעזר באלגוריתם אוקלידס:

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 5 = (x-5)(x^2-1) - x$$
$$x^2 - 1 = x \cdot x - 1$$

לכן

$$\begin{aligned}1 &= x\cdot x - g(x) = x\cdot((x-5)g(x) - f(x)) - g(x) = \\ &= -x\cdot f(x) + (x^2-5x-1)g(x)\end{aligned}$$

ומכאן שההופכי של α^2-1 הוא $\alpha^2-5\alpha-1$.

שאלה 2. יהי $f(x)=x^4-2x^2-6$.

א. חשבו את שדה הפיצול E של f מעל $\mathbb{Q}$ ואת המימד $[E:\mathbb{Q}]$. (30 נק')

ב. יהי L שדה הפיצול של f מעל $\mathbb{F}_3$. מהו $[L:\mathbb{F}_3]$? נמקו. (10 נק')

פתרון.

א. ראשית, נשים לב ש-$f(x)$ אי-פריק מעל $\mathbb{Q}$ לפי קריטריון אייזנשטיין עם $p=2$. נחשב את שורשי f מעל $\mathbb{C}$: נציב $t=x^2$ ונקבל את המשוואה הריבועית

$$t^2-2t-6=0.$$

השורשים שלה הם

$$t_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot(-6)}}{2}=1\pm\sqrt{7}.$$

לכן השורשים של f הם $\pm\sqrt{1\pm\sqrt{7}}$, ושדה הפיצול של f מעל $\mathbb{Q}$ הוא

$$E=\mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{7}},\sqrt{1-\sqrt{7}}).$$

לגבי המימד: ניעזר במגדל השדות

$$\mathbb{Q}\subseteq K=\mathbb{Q}(\sqrt{1+\sqrt{7}})\subseteq E.$$

כיוון ש-f אי-פריק ומאפס את $\sqrt{1+\sqrt{7}}$, הוא הפולינום המינימלי של $\sqrt{1+\sqrt{7}}$, ולכן $[K:\mathbb{Q}]=4$. נותר לחשב את $[E:K]$. נשים לב כי $E=K(\sqrt{1-\sqrt{7}})$, וכי $K\neq E$ כי $K\subseteq\mathbb{R}$ ואילו $\sqrt{1-\sqrt{7}}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. נראה כי $[E:K]=2$, על ידי כך שנראה ש-$a=\sqrt{1-\sqrt{7}}$ הוא שורש של פולינום ריבועי מעל K. נשים לב ש-$\sqrt{7}\in K$, כי $\sqrt{7}=\sqrt{1+\sqrt{7}}^2-1$; לכן $g(x)=x^2-(1-\sqrt{7})\in K[x]$ הוא פולינום שמאפס את a, והוא אי-פריק כי אין לו שורשים ב-K (שני השורשים שלו מרוכבים ואילו $K\subseteq\mathbb{R}$). זה מראה ש-$[E:K]=2$. מכפליות המימד נסיק $[E:\mathbb{Q}]=[E:K]\cdot[K:\mathbb{Q}]=8$.

ב. מעל $\mathbb{F}_3$ נשים לב כי הפולינום הוא

$$f(x)=x^4+x^2=x^2(x^2+1).$$

הפולינום x^2+1 הוא אי-פריק מעל $\mathbb{F}_3$, כי הוא ממעלה 2 ואין לו שורשים ב-$\mathbb{F}_3$. כיוון ש-x^2 כבר מפוצל ב-$\mathbb{F}_3$, שדה הפיצול של $f(x)$ יהיה זהה לשדה הפיצול של x^2+1. לכן $L=\mathbb{F}_3[\sqrt{-1}]$, וזו הרחבה ממימד 2 של $\mathbb{F}_3$ (כי $\sqrt{-1}$ הוא שורש של פולינום אי-פריק ממעלה 2; על ידי הצבה, קל לוודא של-x^2+1 אין שורשים).

שאלה 3. יהי F שדה, ונסמן $p=\mathrm{char}F$.

א. יהי $f \in F[x]$ פולינום אי-פריק כך ש-$(\deg f, p) = 1$. הוכיחו כי f ספרבילי מעל F.
(15 נק')

ב. תהי K/F הרחבת שדות ממימד סופי כך ש-$([K:F], p) = 1$. הוכיחו כי ההרחבה K/F היא ספרבילית.
(15 נק')

פתרון.

א. נכתוב $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. נשים לב כי $f'(x) = na_n x^{n-1} + \cdots + a_1$. כיוון ש-$(n,p) = 1$, המקדם העליון של f' אינו מתאפס, ולכן $f' \neq 0$. מתוצאה מההרצאה, כיוון ש-f אי-פריק ו-$f' \neq 0$ נקבל ש-f ספרבילי מעל F.

ב. יהי $\alpha \in K$. נשים לב כי $F \subseteq F(\alpha) \subseteq K$ הוא תת-שדה, ומכפליות המימד $[K:F] = [K:F(\alpha)] \cdot [F(\alpha):F]$. לכן גם $([F(\alpha):F], p) = 1$. אבל $[F(\alpha):F]$ הוא דרגת הפולינום המינימלי של α, ומסעיף א' נקבל שהפולינום המינימלי של α ספרבילי מעל F. בסך הכל נקבל ש-K/F הרחבה ספרבילית.