הרצאה 13

המטרה של היום: להראות איך נשתמש להוכחה של

תורת שדות המחלקה המקומיים.

יהי $K/\mathbb{Q}_p$ הרחבה סופית. בפעם הקודמת

אמרנו שיש $K^* \xrightarrow{r_K} Gal(\bar{K}/K)^{ab} = Gal(K^{ab}/K)$ יחיד

אם L/K

$$\begin{tikzcd}
K^* \arrow[r, "r_K"] & Gal(K^{ab}/K) \\
L^* \arrow[u, "N_{L/K}"] \arrow[r, "r_L"] & Gal(L^{ab}/L) \arrow[u, "\sigma \mapsto \sigma|_{K^{ab}}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
K^* \arrow[d] & \supseteq \mathcal{O}_K^* \arrow[d, "\wr"] & \supseteq 1+\mathfrak{p}_K \arrow[d, "\wr"] & \supseteq 1+\mathfrak{p}_K^2 \supseteq 1+\mathfrak{p}_K^3 \supseteq \dots \\
Gal(K^{ab}/K) & \supseteq Gal(K^{ab}/K^{nr}\cap K^{ab}) & \supseteq Gal(K^{ab}/K^{tr}\cap K^{ab}) & \supseteq \dots \quad \dots
\end{tikzcd}$$

איך מוכיחים את הקיום של r_K?

<u>הגדרה</u>: תהי G חבורה פרו-סופית. (כמו $\hat{\mathbb{Z}}$ או $G_K=Gal(\bar{K}/K)$)

G-מודול הינו חבורה אבלית M עם מבנה של

$\mathbb{Z}[G]$-מודול. לכל $m\in M$ מניחים כי $stab(m)=\{g\in G: gm=m\}$ תת״ח פתוחה.

רוצים להגדיר את הקוהומולוגיות $H^i(G,M)$.

<u>הגדרה מפורשת</u> נגדיר קומפלקס

$$C^i(G,M) = \{\varphi : G^i \to M, \text{ קבועות מקומית}\}$$

$$C^0(G,M) = M$$

$$d^i : \underset{\varphi}{C^i(G,M)} \longrightarrow C^{i+1}(G,M)$$

$$d^i\varphi(x_1,\dots,x_{i+1}) = x_1\varphi(x_2,\dots,x_{i+1}) - \varphi(x_1x_2, x_3,\dots,x_{i+1}) +$$
$$\varphi(x_1, x_2x_3,\dots,x_{i+1}) - \dots$$
$$+ (-1)^i\varphi(x_1,x_2,\dots,x_ix_{i+1}) +$$
$$(-1)^{i+1}\varphi(x_1,x_2,\dots,x_i)$$

<u>תרגיל</u> $d^{i+1}\circ d^i = 0$

<u>הגדרה.</u> $H^i(G,M) = \ker d^i / \operatorname{Im} d^{i-1}$

$$d^0(\varphi)(x_1) = x_1\varphi(-) - \varphi(-) = x_1 m - m$$

$m=\varphi\in C^0$ $\quad d^0 : m \mapsto (x \mapsto xm - m)$

$$H^0(G,M) = \ker d^0 = \{m\in M : gm = m \ \forall g\in G\} = M^G$$

$H^1(G,M) = ?$ $\quad \mathrm{Im}\, d^0 = B^1(G,M) = \{g \mapsto gm - m\}$

$$(d^1\varphi)(x_1,x_2) = x_1\varphi(x_2) - \varphi(x_1x_2) + \varphi(x_1)$$

$\varphi\in C^1$ $\quad Z^1(G,M) = \ker d^1 = \{\varphi : G\to M : \varphi(x_1x_2) = \varphi(x_1) + x_1\varphi(x_2)\}$

אם הפעולה של G על M טריוויאלית, אז

$$Z^1(G,M) = \mathrm{Hom}(G,M)$$

$$H^1(G,M) = Z^1(G,M) / B^1(G,M)$$

איך טבעי להגדיר את הקוהומולוגיה? פונקטורים

נגזרים של פונקטור האינווריאנטים $M \mapsto M^G$

G-מודול I נקרא אינייקטיבי אם

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, hook] \arrow[d] & M_2 \arrow[dl, dotted] \\ I & \end{tikzcd}$$

<u>תרגיל</u> $\mathbb{Z}$-מודולים = חבורות אבליות.

I הינו $\mathbb{Z}$-מודול אינייקטיבי $\Longleftrightarrow$ I חבורה

דיביזבילית, כלומר לכל $g\in I$ ולכל $n\in\mathbb{N}$

קיים $h\in I$ כך ש- $g=nh$.

<u>דוגמא</u> $I=\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

בהינתן G-מודול M, ניקח רזולוציה אינייקטיבית.

כלומר סדרה מדויקת

$$0\to M\to I_0\to I_1\to I_2\to\cdots$$

$$0\to M^G\to I_0^G\xrightarrow{d^0} I_1^G\xrightarrow{d^1} I_2^G\xrightarrow{d^2}\cdots$$ (I_i אינייקטיביים)

$$H^i(G,M)=\ker d^i/\operatorname{Im} d^{i-1}.$$

משפט (משפט 90 של הילברט) תהי L/K הרחבה גלואה
E. Noether
סופית, יהי $G = Gal(L/K)$. אזי $H^1(G,L^*) = 0$.

הוכחה צריך להוכיח $Z^1(G,L^*) = B^1(G,L^*)$. אז יהי $\varphi \in Z^1(G,L^*)$

$$\varphi : G \to L^*$$

לכל $\sigma, \tau \in G$, $\varphi(\sigma\tau) = \varphi(\sigma)\cdot\sigma(\varphi(\tau))$

לכל $\alpha \in L$, נגדיר $b(\alpha) = \sum_{\sigma \in G} \varphi(\sigma)\cdot\sigma(\alpha) \in L$

לפי הלמה של דדקינד האוטומורפיזמים $\sigma : L \to L$
בת"ל מעל L. לכן, קיים $\alpha \in L^*$ כך ש- $b = b(\alpha) \neq 0$.

$$\sigma(b) = \sigma\left(\sum_{\tau \in G} \varphi(\tau)\cdot\tau(\alpha)\right) = \sum_{\tau \in G} \sigma(\varphi(\tau))\cdot\sigma\tau(\alpha) =$$

$$\sum_{\tau} \varphi(\sigma\tau)\cdot(\varphi(\sigma))^{-1}\cdot\sigma\tau(\alpha) = \varphi(\sigma)^{-1}\sum_{\tau \in G}\varphi(\sigma\tau)\cdot\sigma\tau(\alpha) =$$

$$\varphi(\sigma)^{-1}\cdot b.$$

לכן, לכל $\sigma \in G$, $\varphi(\sigma) = b \cdot (\sigma(b))^{-1} =$

$$\sigma(b^{-1}) \cdot (b^{-1})^{-1} = \text{"}\sigma m - m\text{"}$$

$m = b^{-1}$

לכן $\varphi \in B^1(G, L^*)$.

<u>אוצלוה</u>

$$H^1(G_K, (K^{sep})^*) = 0 \qquad G_K = Gal(K^{sep}/K)$$

<u>"הוכחה"</u>

$$G_K = \varprojlim Gal(L/K)$$

$$(K^{sep})^* = \varinjlim L^*$$

<u>טענה</u> יהי $n \geq 1$ מספר טבעי, יהי K שדה:

מאפיין 0 או מאפיין זר ל-n. אזי

$\mu_n = \{x \in \bar{K}^* : x^n = 1\}$

$$H^1(G_K, \mu_n) = K^* / (K^*)^n$$

$(K^*)^n = \{a^n : a \in K^*\}$

<u>הוכחה</u> לפי ההנחה, $K(\zeta_n)/K$ ספרבילי. נביט

בסדרה המדויקת הקצרה של G_K-מודולים:

$$0 \to \mu_n \to \bar{K}^* \to \bar{K}^* \to 0$$
$$x \mapsto x^n$$

מקבלים סדרה מדויקת ארוכה

$$\underset{K^*}{\underset{\|}{}}$$

$$H^0(G_K,\mu_n) \to \underbrace{H^0(G_K,\bar{K}^*)}_{=K^*} \xrightarrow{x\mapsto x^n} \underbrace{H^0(G_K,\bar{K}^*)}_{=K^*} \to H^1(G_K,\mu_n) \to$$

$$\underbrace{H^1(G_K,\bar{K}^*)}_{=0} \to \dots$$

0 (הילברט 90) לכן $H^1(G_K,\mu_n) = K^*/(K^*)^n$.

<u>שאלה</u> מהו $H^2(G_K,\bar{K}^*)$?

<u>הגדרה</u> יהי F שדה. אלגברה מעל F היא חוג (לא בהכרח חילופי) A עם העתקה $F \to Z(A)$.

A נקראית F-אלגברה פשוטה מרכזית (CSA) אם
central simple algebra

ל-A אין אידיאלים דו-צדדיים

ואם $F \simeq Z(A)$.

<u>דוגמא</u> $A = M_n(F)$

לפי וודרברן, $A = M_n(D)$ כאשר D חוג עם חילוק מעל F

נגדיר יחס שקילות: $A \sim B$ אם קיים D כך ש-
$A \simeq M_r(D)$
$B \simeq M_s(D)$.

$Br(F)$ Brauer

חבורת בראואר: איברים: מחלקות השקילות:

$$[A] \cdot [B] = [A \otimes_F B]$$

$$A \otimes A^{op} \simeq M_n(F)$$
$n = \dim_F A$

A^{op}
$a * b = ba$

משפט (לא טריוויאלי.) יהי $K/\mathbb{Q}_p$ הרחבה סופית, אזי

$$H^2(G_K, K^*) = Br(K) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

הגדרה (cup product)

$$H^i(G,M) \times H^j(G,N) \longrightarrow H^{i+j}(G, M\otimes N)$$

$$\varphi \in H^i(G,M), \quad \psi \in H^j(G,N) \longmapsto (\varphi\cup\psi)(x_1,\dots,x_{i+j}) =$$

$$\varphi(x_1,\dots,x_i) \otimes x_1x_2\cdots x_i\psi(x_{i+1},\dots,x_{i+j}).$$

בהינתן G_K-מודול M, נגדיר

$$M^* = \mathrm{Hom}(M, \mu_\infty)$$

$$\mu_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mu_n \subseteq \bar{K}^*$$

$f \in M^*$

$g \in G$

$$(gf)(m) = g(f(g^{-1}m))$$

כך ניתן ל-M^* מבנה של G_K-מודול.

$$M \times M^* \longrightarrow \mu_\infty$$

$$m \times f = f(m)$$

כי בילינארי, לכן

$$M \otimes M^* \longrightarrow \mu_\infty$$

ואז לכל $i \in \{0,1,2\}$, נקבל

$$H^i(G_K, M) \times H^{2-i}(G_K, M^*) \xrightarrow{\cup} H^2(G_K, \mu_\infty) \longrightarrow$$

$$H^2(G_K, \overline{K}^*) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

<u>משפט</u> (דואליות של טייט $^{\text{Tate}}$), יהי $i \in \{0,1,2\}$, $[K:\mathbb{Q}_p] < \infty$,

נניח כי M G_K-מודול סופי. אז ההתאמה

הינו זיווג מושלם (perfect pairing)

$$A \times B \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$(a,b) \longrightarrow \langle a,b \rangle$$

לכל $a \in A$, מתקיים

–

$$A \longrightarrow \mathrm{Hom}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$
$$a \longmapsto (b \mapsto \langle a,b \rangle)$$

כמו כן

$$B \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$
$$b \longmapsto (a \mapsto \langle a,b \rangle)$$

אומרים כי $A \times B \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ זיווג מושלם

אם

$$A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$
$$B \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

דואליות של פונטריאגין: תהי A חבורה אבלית.

$$A^{\vee} = \mathrm{Hom}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

<u>תרגיל</u>: אם A סופית, אז $(A^{\vee})^{\vee} \simeq A$.

לכל A, $(A^{\vee})^{\vee} \simeq \varprojlim A/nA$. בפרט, אם A פרו-סופית,

לכן $(A^\vee)^\vee \simeq A$.

לפי הדואליות של טייט: M סופי:

$$H^1(G_K, M) \simeq \mathrm{Hom}(H^1(G_K, M^*), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

נזכיר כי:

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \varinjlim \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

$$(G_K^{ab})^\vee = \mathrm{Hom}(G_K^{ab}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(G_K, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) =$$

$$\varinjlim \mathrm{Hom}(G_K, \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}) =$$

$$\varinjlim H^1(G_K, \tfrac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z})$$

$M = \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ עם מבנה טריוויאלי של G_K-מודול

$M^* \simeq \mu_n$ עם הפעולה הרגילה של G_K $\mu_n \subseteq \bar{K}^*$

לפי הדואליות של טייט:

$$= \varinjlim \mathrm{Hom}\left(H^1(G_K, \mu_n), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right) =$$

$$\varinjlim \mathrm{Hom}\left(K^*/(K^*)^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right) =$$

$$\mathrm{Hom}\left(\varprojlim K^*/(K^*)^n, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)$$

סך הכל הוכחנו:

$$(G_K^{ab})^\vee \simeq \left(\varprojlim K^*/(K^*)^n\right)^\vee = (\widehat{K^*})^\vee$$

ניקח $\vee$ שוב:

$$G_K^{ab} \simeq \widehat{K^*}$$

מה קורה כאשר K לא מקומי אלא שדה מספרים?

חוג האדלים מעל K

adèle

$$\mathbb{A}_K = \prod_{v\in V_K}{}' K_v$$

$V_K =$ מחלקות שקילות של הערכות על K.

אם v ארכימדי,
$K_v = \mathbb{R}$
$K_v = \mathbb{C}$

$$\mathbb{A}_K = \Big\{ (a_v)_{v\in V_K} : \text{לכל } v\in V_K \text{ חוץ ממספר סופי } a_v \in \mathcal{O}_v \subseteq K_v \Big\}$$

$$\mathbb{A}_K^* = \{ \text{איברים הפיכים של } \mathbb{A}_K \}$$

בכל הקומפ' חוץ ממספר סופי ב- $\mathcal{O}_v^*$.

$$K \hookrightarrow \mathbb{A}_K \qquad (a \mapsto (a)_v)$$

$$K^* \hookrightarrow \mathbb{A}_K^*$$

$$C_K = \mathbb{A}_K^* / K^*.$$

משפט יש איזומורפיזם

$$\theta : C_K \longrightarrow Gal(\bar{K}/K)^{ab} = Gal(K^{ab}/K)$$

אותו ניתן להרחיב לאיזומורפיזם

$$\hat{C}_K \xrightarrow{\sim} Gal(K^{ab}/K)$$