מסלולים קלים ביותר

גרף $G=(V,E)$ מכוון. $w:E\to\mathbb{R}$ פונקציית משקלים.
נתחיל מקודקוד s, ונרצה למצוא את המרחקים(משקלים) של כל הקודקודים מהקודקוד s. נסמן:

$$\delta(s,v)=\begin{cases}\min_p w(p) & \exists p=\langle s,...v\rangle\in E\\ \infty & \nexists p=\langle s,...v\rangle\in E\end{cases}$$

$w(p)=\sum_{i=0}^{k-1}w(v_i,v_{i+1})$ בהינתן מסלול $p=\langle v_0,...v_k\rangle$
אם יש בגרף מעגל בעל מקשל שלילי, שניתן להגיע אליו מs, אז המרחקים הקצרים ביותר לא מוגדרים היטב.

תכונת תת המבנה האופטימלי

תת מסלולים של מסלולים קצרים ביותר הם מסלולים קצרים ביותר.
יהי $p=\langle v_1,...v_k\rangle$ קצר ביותר, אז $p_{ij}=\langle v_i,...v_j\rangle$ הוא מסלול קצר ביותר.

הוכחה

נניח בשלילה שיש מסלול p'_{ij} מv_i לv_j המקיים $w(p'_{ij})<w(p_{ij})$. נבנה מסלול p' : $v_1\xrightarrow{p_{1i}}v_i\xrightarrow{p'_{ij}}v_j\xrightarrow{p_{jk}}v_k$. מתקיים:

$$w(p')=w(p_{1i})+w(p'_{ij})+w(p_{jk})<w(p)$$

בסתירה לכך שp קצר ביותר.

אי שוויון המשולש

בהנתן קשת (u,v):

$$\delta(s,v)\le\delta(s,u)+w(u,v)$$

טכניקת ההקלה

$\underline{Relax}(u,v,w)$ (w פונקציית משקלים)

1. אם $\delta[v] > \delta[u] + w(u,v)$:

   1.1 $d[v] \leftarrow d[u] + w[u,v]$

   1.2 $\pi[v] \leftarrow u$

כלומר לכל קודקוד v, נשמור $d[v]$("הערכה" ל$\delta(s,v)$)

טענה 1

לאחר הקלת הקשת (u,v) מתקיים $d[v] \leq d[u] + w(u,v)$

טענה 2

נאתחל לכל $v \in V - \{s\}$ $d[v] = \infty$, $d[s] = 0$.
לכל $v \in V$ $\pi[v] = NULL$

מתקיים: $\forall v \in V : d[v] \geq \delta(s,v)$ לכל סדרת צעדי הקלה על הקשתות.

הוכחה

נוכיח באינדוקציה על צעדי ההקלה:

<u>בסיס:</u> $\forall_{v-\{s\}} \infty = d[v] \geq \delta(s,v)$
$0 = d[s] \geq \delta(s,s)$

נניח ש$(*)$ מתקיים לk צעדים הראשונים. בצעד ה$k+1$ מבצעים הקלה על הקשת (u,v). $d[v]$ היחיד שיכול להשתנות ולכן לכל $t \in V - \{v\}$ $(*)$ מתקיים.

- אם $d[v]$ לא מתעדכן מההקלה, אז גם $(*)$ מתקיים
- אם $d[v]$ מתעדכן:

$$d[v] = d[u] + w(u,v) \geq \delta(s,u) + w(u,v)$$

נשים לב:
- אם באיזשהו שלב $d[v] = \delta(s,v)$ אז $d[v]$ לא משתנה יותר בעקבות פעולות הקלה.
- אם אין מסלול מs לv אז $d[v] = \delta(s,v) = \infty$.

יהי G_π הגרף שכולל קודקודים ש$d[v]$ לשהם סופי, ואת הקשתות $(\pi(v), v)$

טענה 3

יהי $G = (V,E)$ גרף מכוון ממושקל ללא מעגלים שליליים, וs קודקוד המקור, אז לאחר <u>אתחול הגרף</u>(כמו בטענה 2) תת הגרף G_π יוצר עץ מושרש ששורשו s וכל סדרת צעדי הקלה משמרת את התכונה הזו.

הוכחה

נניח בשלילה שיש בG מעגל $C = \langle v_0, ...v_k = v_0\rangle$. מתקיים: $\pi[v_i] = v_{i-1}$. נניח בה"כ שהקשת (v_{k-1}, v_k) יצרה את המעגל.

$$\forall_i d[v_I] \geq d[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i)$$

ומתקיים $d[v_k] > d[v_{k-1}] + w(v_{k-1}, v_k)$ לפני הוספת (v_{k-1}, v_k)

הוכחנו גרף מכוון ללא מעגלים. נשאר להוכיח שיש מסלול יחיד מs לכל קודקוד בG_π.

היה צריך להוכיח שלכל קודקוד בG_π יש מסלול מs אליו(תרגיל)

משפט

יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון ממושקל ללא מעגלים שליליים, וs קודקוד מקור, ואתחול כמו בטענה 2, וסדרה של הקלות המביאות ל$d[v] = \delta(s, v)$ לכל v, אז G_π הוא עץ מסלולים קצרים מs.

הוכחה

יהי מסלול $p = \langle v_0 = s, ...v_k\rangle$ בG_π. מתקיים $d[v_i] = \delta(s, v_i)$

$$d[v_i] \geq d[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i)$$

$$\Rightarrow \delta(s, v_i) \geq \delta(s, v_{i-1}) + w(v_{i-1}, v_i)$$

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k} w(v_{i-1}, v_i) \leq \sum_{i=1}^{k} (\delta(s, v_i) - \delta(s, v_{i-1})) = \delta(s, v_k) - \delta(s, v_0)$$

$$\Rightarrow w(p) \leq \delta(s, v)$$

בלמן-פורד

1. אתחול של $d[v]$, $\pi[v]$ כמו בטענה 2
2. עבור i בין 1 ל$|v-1|$:
   - 2.1 לכל קשת $(u, v) \in E$
     - 2.1.1 $Relax(u, v)$
3. עבור כל קשת $(u, v) \in E$:
   - 3.1 אם $d[v] > d[u] + w(u, v)$
     - 3.1.1 החזר "לא"
4. החזר "כן"

סה"כ זמן ריצה - $O(|V| \cdot |E|)$, והאלג' מזהה אם יש מעגלים שליליים.

טענה

בזמן עצית האלג׳ $\forall_v d[v] = \delta(s,v)$. נוכיח באינדוקציה על המעברים:

1. נניח שיש מסלול מs לv. נסתכל על המסלול הקל ביותר $p = \langle v_0 = s, ...v_k = v\rangle$, $k \le |V| - 1$.
   נראה שאחרי המעבר הi $d[v_i] = \delta(s, v_i)$:

   בסיס $\surd$

   נניח $d[v_i] = \delta(s,v_i)$ לאחר המעבר הi ונסתכל על המעבר ה$i+1$:
   במעבר ה$i+1$ עוברים על כל הקשתות, ובפרט על (v_i, v_{i+1}).

$$d[v_{i+1}] \le d[v_i] + w(v_i, v_{i+1}) = \delta(s, v_i) + w(v_i, v_{i+1}) = \delta(s, v_{i+1})$$

$$d[v_{i+1}] \le \delta(s, v_{i+1})$$

$$d[v_{i+1}] = \delta(s, v_{i+1})$$

2. נניח שאין מסלול מs לv. אזי $d[v] = \delta(s,v) = \infty$

הוכחת נכונות האלגוריתם

צ״ל ש

- אם אין מעגלים שליליים האלג׳ מחזיר ״כן״ ומחשב $d[v] = \delta(s,v)$, וG_π הוא עץ המסלולים הקצרים ביותר.
- ואם יש מעגלים שליליים האלגוריתם יחזיר ״לא״.

אם אין מעגל שלילי:

$$d[v] = \delta(s,v) \le (s,u) + w(u,v) = d[u] + w(u,v)$$

אם יש מעגל C שלילי: אז $\sum_c w(v_{i-1}, v_i) < 0$. נניח בשלילה שהאלג׳ החזיר ״כן״.

$$\forall_i d[v_i] \le d[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i)$$

$$\sum d[v_i] \subseteq \sum (d[v_{i-1}] + w(v_{i-1}, v_i)) = \sum d[v_i] + \sum w(v_{i-1}, v_i)$$

בסתירה למעגל C

$(G)DAG$

1. מיון טופולוגי G (עלות - $O\left(|V|+|E|\right)$)
2. אתחול של $\pi\left[v\right]$, $d\left[v\right]$
3. לכל קודקוד v לפי סדר המיון הטופולוגי: (עלות - $O\left(|E|\right)$)

   3.1 לכל שכן u של v:

   $Relax\left(v,u,w\right)$

סה"כ - עלות $O\left(|V|+|E|\right)$