עוד כמה הערות על המשוואה הלינארית עם מקדמים קבועים מסדר 2

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

מש' מאפיינת $m^2 + a_1 m + a_0 = 0$.

I שורשים ממשיים שונים λ_1, λ_2: פתרון כללי $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

II שורשים מרוכבים צמודים $\alpha \pm i\beta$: $y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$

III שורש ממשי אחד כפודל α: $y = e^{\alpha x}\left(C_1 + C_2 x\right)$

ניתן לקבל II מ I - אם נתייחס לשורשים כאילו הם ממשיים היינו רושמים

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)}x = C_1 e^{\alpha x} e^{i\beta x} + C_2 e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = e^{\alpha x}\left(C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}\right) = \ldots$$

נוסחת אויילר: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, θ ממשי.

$$= e^{\alpha x}\left(C_1\left[\cos\beta x + i\sin\beta x\right] + C_2\left[\cos\beta x - i\sin\beta x\right]\right)$$

$$= e^{\alpha x}\left(\underbrace{(C_1 + C_2)}_{C_3}\cos\beta x + \underbrace{(C_1 - C_2)}_{C_4}\sin\beta x\right)$$

ניתן לכתוב II בכמה גרסאות

נתחיל מC_1, C_2 קבועים חופשיים:

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right) =$$

$$= e^{\alpha x}\sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\cos\beta x + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}}\sin\beta x\right)$$

$$e^{\alpha x}\sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\cos\theta\cos\beta x + \sin\theta\sin\beta x\right)$$

$$= e^{\alpha x} C_3 \cos\left(\beta x - \theta\right)$$

כאן הקבועים החופשיים הם C_3, θ. אופציה נוספת:

$$= e^{\alpha x}\sqrt{C_1^2 + C_2^2}\left(\sin\theta\cos\beta x + \cos\theta\sin\beta x\right)$$

$$= e^{\alpha x} C_3 \sin\left(\beta x + \theta\right)$$

ניתן לקבל III

מI ע"י גבול $\lambda_2 \to \lambda_1$ או מII ע"י גבול $\beta \to 0$. נראה את השני:

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$$

C_1, C_2 קבועים חופשיים. אני רוצה לעשות גבול $\beta \to 0$. על פניו נראה שאני מקבל $y = e^{\alpha x} C_1$. משהו לא בסדר!

הטעות היא שאמנם C_1, C_2 הם קבועים חופשיים, אבל יכול להיות שהם תלויים ע"י β. לא לקחנו בחשבון תלות של C_1, C_2 בβ.

$$\begin{cases} y(0) = C_1 \\ y'(0) = \alpha C_1 + \beta C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = y(0) \\ C_2 = \underbrace{y'(0) - \alpha y(0)}_{\beta} \end{cases}$$

הפתרון הוא

$$y = e^{\alpha x}\left(y(0)\cos\beta x + \left(y'(0) - \alpha y(0)\right)\frac{\sin\beta x}{\beta}\right)$$

הקבועים החופשיים פה הם $y(0), y'(0)$. עכשיו ניקח גבול $\beta \to 0$:

$$y = e^{\alpha x}\left(\underbrace{y(0)}_{new\, C_1} + \underbrace{\left(y'(0) - \alpha y(0)\right)x}_{new\, C_2}\right)$$

יישום

התנודות של מסה על קפיץ מתוארות על ידי המד"ר $y'' + k^2 y = 0$(פונקציה $y(t)$ של זמן ולא של x). k קבוע

המשוואה המאפיינת היא $m^2 + k^2 = 0$. שורשים: $m = \pm ik$. הפתרון הוא $y(t) = y_0\cos(kt - \theta)$(כאשר k, θ קבועים חופשיים).

המשוואה הזאת טובה לעולם אידיאלי. בעולם האקטואלי יש חיכוך, שמסומן ע"י הקבוע λ:

$$y'' + \lambda y' + k^2 y = 0$$

משוואה מאפיינת: $m^2 + \lambda m + k^2 = 0$. שורשים: $m = \frac{1}{2}\left(-\lambda \pm \sqrt{4k - \lambda^2} i\right)$($\lambda$ קטן, לכן $\lambda^2 - 4k$ וודאי שלילי)

$$y(t) = y_0 e^{-\lambda t/2}\cos\left(\sqrt{k^2 - \frac{\lambda^2}{4}}t - \theta\right)$$

בגלל החיכוך המחזור $\left(= \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \frac{\lambda^2}{4}}}\right)$ יותר ארוך.

נוסיף דחיפה(Forcing)

$$y'' + \lambda y' + k^2 y = A \sin \omega t$$

A - עצמת הדחיפה. ω - התדירות של הדחיפה.
מש. לא הומוגנית: פתרון פרטי?
נחפש פתרון פרטי בצורה

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

$$y' = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t$$

$$y'' = -C_1 \omega^2 \cos \omega t - C_2 \omega^2 \sin \omega t$$

נציב:

$$\begin{cases} -C_1\omega^2 + \lambda C_2 \omega + k^2 C_1 = 0 \\ -C_2\omega^2 - \lambda C_1 \omega + k^2 C_2 = A \end{cases}$$

$$C_2 = \frac{\omega^2 - k^2}{\lambda\omega} C_1 \qquad \frac{-\left(k^2 - \omega^2\right)^2}{\lambda\omega} C_1 - \lambda\omega C_1 = A$$

$$C_2 = \frac{\left(k^2 - \omega^2\right) A}{\left(k^2 - \omega^2\right)^2 + \lambda^2\omega^2} \qquad C_1 = \frac{-\lambda\omega A}{\left(k^2 - \omega^2\right)^2 + \lambda^2\omega^2}$$

$$y\left(t\right) = A \frac{-\lambda\omega \cos \omega t + \left(k^2 - \omega^2\right) \sin \omega t}{\left(k^2 - \omega^2\right)^2 + \lambda^2\omega^2} + y_0 e^{-\frac{\lambda t}{2}} \cos\left(\sqrt{k^2 - \frac{\lambda^2}{4}} t - \theta\right)$$

ניתן לכתוב את הפתרון הפרטי

$$\frac{A}{\sqrt{\left(k^2 - \omega^2\right)^2 + \lambda^2\omega^2}} \left(-\sin \beta \cos \omega t + \cos \beta \sin \omega t\right) = \frac{A \sin\left(\omega t - \phi\right)}{\sqrt{\left(k^2 - \omega^2\right) + \lambda^2\omega^2}}$$

הערות

1. בגלל הגורם $e^{-\lambda t/2}$הפתרון של ההומוגני דועך כאשר t עולה, לא חשוב מיהם y_0, θ. נשאר הפתרון הפרטי $\frac{A \sin\left(\omega t - \phi\right)}{\sqrt{\left(k^2 - \omega^2\right)^2 + \lambda^2\omega^2}}$.
2. לפתרון הפרטי יש אותה תדירות כמו איבר הדחיפה $A - \sin \omega t$, אבל יש עיכוב ϕ.
3. האמפיטודה של הפתרון הפרטי יכול להיות גדול מאוד אם $k \approx \omega$, כלומר תדירות הדחיפה קרובה לתנודות המקוריות של הקפיץ.

משפט הקיום והיחידות

$$\boxed{y(x_0) = x_0 \quad y' = f(x,y)}$$

$$D = \{(x,y) | |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le b\}$$

נניח שf רציפה בD, חסומה($|f(x,y)| \le M$) בD ומקיים תנאי ליפשיץ $|f(x,y) - f(x,Y)| \le k|y - Y|$ לכל $(x,y),(x,Y)$ בD. בתנאים אלו קיים פתרון אחד ויחיד לבעיית קושי המוגדרת בקטע $|x - x_0| \le \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$(*)

ניתן לכתוב (*) מהצורה $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$(**)

קל לבדוק ש(**) גורר את (*) ומקבלים (**) מ(*) ע"י אינטגרציה מx_0 לx.

תהליך ההוכחה

1. נבנה סדרה של פונקציות $y_0(x), y_1(x), y_2(x), \ldots$ שאולי מתכנסים.
2. נוכיח שהסדרה אכן מתכנסת לגבול מסויים במ"ש.
3. נוכיח שהגבול הוא אכן פתרון.
4. נוכיח שהפתרון יחיד.

1. בניית סדרת פונקציות

$$y_0(x) = y_0$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1)\, dt$$

$$\vdots$$

$$y_{n+1}(x) + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n)\, dt$$

יש לנו לוודא ש

$$\forall n \quad |y_n(t) - y_0| \le b$$

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt \right| \le M|x - x_0|$$

נדרוש $|x - x_0| \le \dfrac{b}{M}$ ו$|y_1(x) - y_0| \le b$.

2. הוכחה ע"י אינדוקציה

נוכיח התכנסות של הסדרה במידה שווה.

$$y_n\left(x\right)=y_0\left(x\right)+\left(y_1\left(x\right)-y_0\left(x\right)\right)+\left(y_2\left(x\right)-y_1\left(x\right)\right)+...+\left(y_n\left(x\right)-y_{n+1}\left(x\right)\right)$$

במקום הסדרה $y_n\left(x\right)$ נסתכל על הטור האינסופי

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(y_{i+1}\left(x\right)-y_i\left(x\right)\right)$$

גם זה מתכנס, הגבול שלו יהיה הגבול $\lim y_n\left(x\right)$ מינוס y_0. נשתמש במבחן M של ויירשטראס. נוכיח ע"י אינדוקציה ש

$$\left|y_{i+1}\left(x\right)-y_i\left(x\right)\right|\leq\frac{Mk^i\left|x-x_0\right|^{i+1}}{(i+1)!}\leq\frac{Mk^ia^{i+1}}{(i+1)!}$$

<u>נבדוק $i=0$</u>: $\left|y_1\left(x\right)-y_0\right|\leq M\left|x-x_0\right|$ כבר הוכחנו.

<u>שלב אינדוקטיבי:</u>

$$\left|y_{i+1}\left(x\right)-y_i\left(x\right)\right|=\left|\int_{x_0}^{x}f\left(t,y_i\left(t\right)\right)-f\left(t,y_{i-1}\left(t\right)\right)dt\right|$$

$$\leq\left|\int_{x_o}^{x}k\left|y_i\left(t\right)-y_{i-1}\left(t\right)\right|dt\right|\leq\frac{Mk^i\left|x-x_0\right|^{i+1}}{(i+1)!}$$

הוכחנו שהסדרה $y_0,y_1\left(x\right),y_2\left(x\right),...$ מתכנסת לגבול במ"ש.

3. נוכיח שהגבול הוא פתרון

נקרא לגבול הסדרה $y\left(x\right)$

$$y_{n+1}\left(x\right)=y_n+\int_{x_0}^{x}f\left(t,y_n\left(t\right)\right)dt$$

ניקח גבול $n\to\infty$

$$y\left(x\right)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f\left(t,y_n\left(t\right)\right)dt$$

יודעים ש$y\left(t\right)\to y_n\left(t\right)$ במידה שווה. מזה ומתנאי ליפשיץ נובע ש$\to$, $f\left(y,y_n\left(t\right)\right)$ $f\left(t,y\left(t\right)\right)$. לפי משפט סטנדרטי באינפי הגבול של אינטגרל של סדרה של פונקציות המתכנסות במ"ש שווה לאינטגרל של הגבול, כלומר $y\left(x\right)=y_0+\int_{x_0}^{x}f\left(t,y\left(t\right)\right)dt$

4. הוכחת יחידות של הפתרון

נניח ש$y(x)$ הוא פתרון של (**)

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

$|y(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt\right| \leq M|x - x_0|$ עבור y_0

$|y(x) - y_1(x)| = \left|\int_{x_0}^{x} f(t, d(t)) - f(t, y_0(t))\, dt\right| \leq kM\left|\int_{x_0}^{x} |t - x_0|\, dt\right| = \frac{kM|x - x_0|^2}{2!}$ עבור y_1

וכולי עבור y_i לכל $0 \leq i \leq n$. ע"י אינדוקציה נקבל $|y(x) - y_i(x)| \leq \frac{k^i M |x - x_0|^{i+1}}{(i+1)!}$ עבור n.

צד ימין שואף לאפס כאשר i שואף ל∞, ולכן $y(x)$ הוא גבול הקירובים $y_0, y_1(x), y_2(x), \ldots$. ■

הפונקציות המתכנסות $y_0(x), y_1(x), \ldots$ לפתרון של $y' = f(x, y)$ נקראות הקירובים של Picard (Picard approximation)

דוגמה

$$y(0) = 0, y' = x + y^2$$

$$y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt = 0 + \int_{0}^{x} t + y_n^2(t)\, dt$$

$$y_0 = 0$$

$$y_1 = \int_0^x t\,dt = \frac{x^2}{2}$$

$$y_2 = \int_0^x \left(t + \frac{t^4}{4}\right) dt = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20}$$

$$y_3 = \int_0^x \left(t + \left(\frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{20}\right)^2\right) dt = \ldots$$