מבנים אלגבריים ־ תירגול 3

6 בנובמבר 2015

תזכורת: תהא A קבוצה. תת קבוצה $R \subseteq A \times A$ נקראת יחס על A. סימון $(a,b) \in R$ יסומן לעיתים aRb.
יחס יקרא

1. רפלקסיבי, אם $\forall a \in A:\ (a,a) \in R$
2. סימטרי, אם $aRb \Rightarrow bRa$
3. טרנזיטיבי, אם $aRb.bRc \Rightarrow aRc$

יחס המקיים את שלושת התכונות האלה נקרא יחס שקילות.
למשל, נגדיר יחס על $\mathbb{Z}$ בצורה הבאה:

$$x \sim y \iff 3|\,(x-y)$$

טענה/עובדה: $\sim$ הוא יחס שקילות.
למשל $0 \sim 3 \sim 6 \sim 9 \sim 12$
הגדרה: תהא A קבוצה, ~ יחס שקילות ו $x \in A$. מחלקת השקילות של x מוגדרת

$$[x]_\sim = \{y \in A\ :\ x \sim y\}$$

כלומר כל האיברים המתיחסים ל x.
למשל: ביחס הקודם

$$[0]_\sim = \{0, \pm 3, \pm 6, \ldots\}$$

$$[1]_\sim = \{1, 4, 7, \ldots. - 2, -5, \ldots\}$$

$$[2]_\sim = \{2, 5, 8, \ldots - 1, -4, \ldots\}$$

משפט:
תהא A קבוצה, ~ יחס שקילות עליה ו $x, y \in A$ אזי:

1. $x \sim y \iff [x] = [y]$
2. $x \nsim y \iff [x] \cap [y] = \emptyset$

3. $x \in [x]$

למשל : מחלקות השקילות ממקודם הן המחלקות השקילות היחידות כל כל מספר שלם x שקול ל 0 או 1 או 2 ואז מחלקת השקילות $[x]$ היא אחת מהשלוש שצוינו.
הגדרה: קבוצת המנה מוגדרת

$$A/\sim = \{[x]_\sim \,:\, x \in A\}$$

כלומר, קבוצת מחלקות השקילות. בדוגמא הקודמת $\{[0],[1],[2]\} = \mathbb{Z}/\sim = \mathbb{Z}_3$.
משפט: A היא איחוד זר של מחלקות השקילות, כלומר

$$A = \bigcup [x]$$

למשל, רואים בדוגמא הקודמת.
הערה: באופן דומה, לכל n טבעי ניתן להגדיר יחס שקילות על השלמים ע"י

$$x \sim y \iff n|\,(x-y)$$

ולהגדיר את קבוצת המנה כ

$$\mathbb{Z}_n = \{0,1,2,\ldots n-1\}$$

לפעמים נרצה להפוך קבוצת מנה לחבורה, לשם כך צריך לבדוק שהפעולה שהוגדרה היא "מוגדרת היטב"
דוגמא, פעולה ב $\mathbb{Z}_n$ כך:

$$[a]+[b]=[a+b]$$

מה צריך לבדוק? שהפעולה מוגדרת. כלומר אם $[a]=[a'],[b]=[b']$ אזי $[a+b]=[a'+b']$
אכן, $a \sim a', b \sim b'$ גורר כי $n|a-a',\, n|b-b'$ ואז $n|\,(a-a')+(b-b')=(a+b)-(a'+b')$ כלומר $a+b \sim a'+b'$ שזה אומר $[a+b]=[a'+b']$.
כעת אחרי שיודעים שהפעולה מוגדרת, שאר האקסיומות פשוטות יותר:

1. קיבוציות נובע מקיבוציות של חיבור בשלמים
2. $[0]$ הוא הנטרלי
3. $-[a]=[-a]$