שיעורי בית 6

1. תהא G חבורה ו $H \trianglelefteq G$ תת חבורה נורמלית. הוכח/הפרך
   (א) אם G ציקלית גם G/H ציקלית.
   (ב) אם G/H ציקלית גם G ציקלית.

2. נתון: $H_2 \trianglelefteq G_2$ וגם $H_1 \trianglelefteq G_1$. הוכח:
   (א) $(H_1 \times H_2) \trianglelefteq (G_1 \times G_2)$
   (ב) $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \cong (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$

3. הוכיחו/הפירכו:
   (א) תהא G חבורה ו $N, K \trianglelefteq G$ אזי $N \cap K \trianglelefteq G$.
   (ב) תהא G חבורה ו $N, K \leq G$ כך ש $K \trianglelefteq G$ וגם $N \trianglelefteq K$ אזי $K \trianglelefteq G$.

4. תהא G חבורה ו $N, K \trianglelefteq G$ שתי תתי חבורה נורמליות המקיימות $N \cap K = \{e\}$. הוכיחו כי

$$\forall x \in N, y \in K : \ xy = yx$$

[הדרכה: התבוננו ב $x^{-1}y^{-1}xy$]

5. תהא G חבורה ו $N \trianglelefteq G$ תת חבורה נורמלית המקיימת $|{}^{G}/_{N}| = p$ כאשר p מספר ראשוני.
   (א) הוכיחו לכל $g \in G \setminus N$ (כל איבר בקבוצה G הפרש הקבוצה H) מתקיים כי $g, g^2, \ldots g^p$ נציגים של מחלקות שונות ב ${}^{G}/_{N}$ (ולכן $\left\{g^i N \ : \ 1 \leq i \leq p\right\} = {}^{G}/_{N}$)
   (ב) הוכיחו כי אם בנוסף $N \subseteq Z(G)$ (כלומר N מוכלת במרכז של G) אזי G חבורה חילופית (או מילים אחרות $Z(G) = G$).

.6

(א) תהא G חבורה סופית ותהא H תת חבורה נורמלית שלה. נסמן $n = |G/H|$. הוכיחו כי לכל $g \in G$ מתקיים כי $g^n \in H$ [הדרכה לצורך התרגיל: משפט לגרנז'].

(ב) הוכיחו כי לחבורה A_4 אין תת חבורה מסדר 6 [הדרכה לצורך התרגיל: הניחו בשלילה כי קיימת H ת"ח מסדר 6, והוכיחו כי כל המחזורים $(i_1, i_2, i_3) \in H$ עבור i_1, i_2, i_3 שונים).