פתרון מבחן מועד ב' בקורס 83114
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

שאלה 1.

א. היעזר בהגדרת האינטגרל המסוים של רימן לחישוב גבול הסדרה: $\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)}$.

ב. חשב את סכום הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$.

פתרון:

א. נרשום:

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{n}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

קיבלנו סכום רימן של הפונקציה $f(x)=\ln(1+x)$ בקטע $[0,1]$ עם סדרת החלוקות $\{T_n\}$ בה כל T_n מחלקת את הקטע לקטעים שווים באורך $\Delta x_i=\frac{1}{n}$ כ"א, ובחירת הנקודות: $\alpha_i=\frac{i}{n}\in[x_i,x_{i-1}]$.

הפונקציה $\ln(1+x)$ רציפה ולכן אינטגרבילית בקטע $[0,1]$. מכאן שגבול סכומי הרימן כאשר $\lambda(T_n)\xrightarrow{n\to\infty}0$ הוא האינטגרל המסוים המחושב עפ"י נוסחת ניוטון לייבניץ:

$$\int_0^1\ln(1+x)\,dx=\int_1^2\ln x\,dx=x\ln x-x\Big|_1^2=2\ln 2-1.$$

ב. נכתוב: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}nx^n\Big|_{x=\frac{1}{2}}$ ונשים לב כי: $nx^n=x\cdot\left(x^n\right)'$.

לפיכך: $$\sum_{n=0}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^n\right)'=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'=x\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

רדיוס ההתכנסות של טור החזקות הוא $R=1$ ולפיכך גם זה של טור הנגזרות. לכן הגזירה איבר איבר בטור מוצדקת בתחום הסגור $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ המוכל בתחום ההתכנסות ובו טור הנגזרות מתכנס במידה שווה.

באותו האופן נשים לב כי: $\left(x^n\right)''=n\left(x^{n-1}\right)'=n(n-1)x^{n-2}$ ומכאן:

$$\sum_{n=0}^{\infty}n(n-1)x^n=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^n\right)''=x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)''=x^2\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)''=\frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

לכן בתחום $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ נקבל בסה"כ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^2=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty} nx^n=\frac{2x^2}{(1-x)^3}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{2x^2+x(1-x)}{(1-x)^3}=\frac{x^2+x}{(1-x)^3}$$

החיבור הזה מותר שכן שני הטורים מתכנסים בהחלט בקטע $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ שהוא בתוך רדיוס ההתכנסות ולכן

מותר לסכום את סך האיברים בכל סדר. נקבל: $S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\left.\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}\right|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}}{\frac{1}{8}}=6$.

שאלה 2. תהא הפונקציה: $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. בדוק היכן f דיפרנציאבילית.

ב. חשב את הנגזרת המכוונת של f בכיוון הווקטור (המנורמל) $h=(h_1,h_2)$ בנקודה $(1,0)$.

פתרון:

א. עבור $(x,y)\neq(0,0)$ הנגזרות החלקיות של f רציפות ולכן בהכרח f דיפרנציאבילית.

בראשית נקבל: $f_x(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}}{h}=1$

וגם: $f_y(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$.

כעת נבדוק האם ניתן לכתוב:

$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y+\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\cdot\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

כך ש: $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=0$.

אם נציב את הנגזרות החלקיות המאופסות נקבל שהשאלה היא האם מתקיים:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon(\Delta x,\Delta y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\frac{\Delta x^3+\Delta x^2\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}-\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\frac{\Delta x^2\Delta y-\Delta x\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x^2\Delta y-\Delta x\Delta y^2}{\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)^{3/2}}=0$$

אם נציב את המסלול: $\Delta y=k\Delta x$ נקבל: $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{k\Delta x^3-k^2\Delta x^3}{\left(1+k^2\right)^{3/2}\Delta x^3}=\frac{k-k^2}{1+k^2}$

כלומר הגבול כלל לא קיים והמסקנה היא ש- f אינה דיפרנציאבילית בראשית.

ב. כיוון שבנקודה $(1,0)$ הפונקציה היא דיפרנציאבילית ניתן להכפיל סקלרית בגרדיאנט:

$$f_x(1,0)=\left(\frac{x^3+x^2y}{x^2+y^2}\right)_x\Bigg|_{(1,0)}=\frac{\left(3x^2+2xy\right)\left(x^2+y^2\right)-2x\left(x^3+x^2y\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\Bigg|_{(1,0)}=\frac{3-2}{1}=1$$

$$f_y(1,0)=\left(\frac{x^3+x^2y}{x^2+y^2}\right)_y\Bigg|_{(1,0)}=\frac{x^2\left(x^2+y^2\right)-2y\left(x^3+x^2y\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\Bigg|_{(1,0)}=\frac{1}{1}=1$$

ומכאן: $\frac{\partial f}{\partial h}(1,0)=\nabla f_{(1,0)}\bullet h=(1,1)\bullet h=h_1+h_2$.

שאלה 3.

א. קבע עבור אילו ערכי α הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(1/n)}{\ln^{\alpha}n}$ מתכנס ובאיזה אופן (בתנאי / בהחלט) ?

ב. קבע היכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}(x-1)^n$ מתכנס במידה שווה. נמק!

פתרון:

א. נשים לב כי הזווית $1/n$ נמצאת תמיד ברביע הראשון ולגן הטור הוא חיובי.

תחילה נשווה עם טור אחר יותר פשוט: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sin(1/n)}{\ln^{\alpha}n}}{\frac{1}{n\ln^{\alpha}n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin(1/n)}{\frac{1}{n}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$.

לגבי הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\alpha}n}$, כיוון שהאיבר הכללי הוא "דגימה" של הפונקציה החיובית והיורדת $\frac{1}{x\ln^{\alpha}x}$ במקומות טבעיים, ניעזר במבחן האינטגרל ונשווה אותו ל: $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^{\alpha}x}$. כאן נוכל להציב $u=\ln x$ ולקבל $\int_{\ln 2}^{\infty}\frac{du}{u^{\alpha}}$ שמתכנס רק עבור $\alpha>1$. לפיכך גם הטור המקורי שלנו מתכנס רק עבור $\alpha>1$ וההתכנסות היא בהחלט.

ב. כיוון שהו טור חזקות תחילה נחשב את רדיוס ההתכנסות עפ"י משפט דלמבר:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\ln(x+1)}\underbrace{=}_{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}\xrightarrow{L'Hopital}\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}=1$$

כלומר הטור מתכנס ב- $(0,2)$. נבדוק בקצוות: בנקודה $x=0$ מתקבל טור לייבניץ שמתכנס,

ואילו בנקודה $x=2$ הטור מתבדר – עפ"י השוואה לטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

מכאן שהטור מתכנס במידה שווה בכל קטע $[0,b], b<2$.

שאלה 4. היעזר במשפט גאוס כדי לחשב את שטף השדה $A=\left(\sin z+x^3-x, y^3-e^{xz}, z-y\right)$

דרך המשטח S שהוא שפת הגוף: $V=\left\{4+x^2+y^2\le z\le 8\right\}$.

פתרון:

נחשב ונקבל: $divA=3\left(x^2+y^2\right)$. נתאר את גבולות האינטגרציה בקורדינטות גליליות:

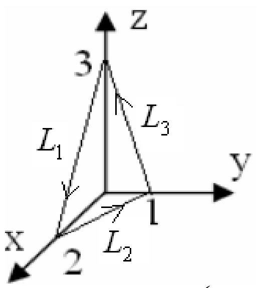
בכל חתך בגובה z, מתקבל העיגול: $x^2+y^2\le z-4$, ולפיכך: $0\le r\le\sqrt{z-4}$.

כמו כן: $4\le z\le 8$ ו- $0\le\theta\le 2\pi$. בסה"כ נקבל:

$$I=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_4^8 dz\int_0^{\sqrt{z-4}}\underset{J}{r}\cdot r^2=6\pi\int_4^8\frac{r^4}{4}\bigg|_0^{\sqrt{z-4}}dz=\frac{3\pi}{2}\int_4^8(z-4)^2\,dz=\frac{3\pi}{2}\frac{(z-4)^3}{3}\bigg|_4^8=32\pi.$$

שאלה 5. יהא S המשולש ב- $\mathbb{R}^3$ שקודקודיו הם: $(2,0,0),(0,1,0),(0,0,3)$ ונסמן את שפתו ב- L.

אשר את משפט סטוקס על L בנוכחות השדה הווקטורי: $A=(y,z,x)$.



פתרון:

<u>אגף שמאל</u>: הכיוון החיובי על L הוא כאשר התחום הוא משמאל, כלומר נגד כיוון השעון.

נחלק את L לשלושה קטעים:

L_1 במישור $y=0$, L_2 במישור $z=0$, L_3 במישור $x=0$.

L_1 הוא הישר: $z=-\frac{3}{2}x+3$ עם פרמטריזציה: $t:0\mapsto 2$, $r(t)=\left(t,0,-\frac{3}{2}t+3\right)$ ו- $dr=\left(1,0,-\frac{3}{2}\right)$.

השדה שם הוא: $\left(0,-\frac{3}{2}t+3,t\right)$ ולפיכך: $\int_{L_1}A\bullet dr=\int_0^2\left(-\frac{3}{2}t\right)dt=-3$.

L_2 הוא הישר: $y=-\frac{x}{2}+1$ עם פרמטריזציה: $t:2\mapsto 0$, $r(t)=\left(t,-\frac{t}{2}+1,0\right)$ ו- $dr=\left(1,-\frac{1}{2},0\right)$.

השדה שם הוא: $\left(-\frac{t}{2}+1,0,t\right)$ ולפיכך: $\int_{L_2}A\bullet dr=\int_2^0\left(1-\frac{t}{2}\right)dt=-1$.

L_3 הוא הישר: $z=-3y+3$ עם פרמטריזציה: $t:1\mapsto 0$, $r(t)=(0,t,-3t+3)$ ו- $dr=(0,1,-3)$.

השדה שם הוא: $(t,-3t+3,0)$ ולפיכך: $\int_{L_3}A\bullet dr=\int_1^0(-3t+3)\,dt=-\frac{3}{2}$.

סה"כ: $\oint_L A\bullet dr = -3-\frac{3}{2}-1=-\frac{11}{2}$.

<u>אגף ימין</u>: משוואת מישור המשולש היא: $3x+6y+2z=6$ עם נורמל מנורמל: $\hat{n}=\frac{1}{7}(3,6,2)$.

הרוטור של השדה הוא: $\nabla\times A=-(1,1,1)$ ומכאן: $\iint_S (\nabla\times A)\bullet\hat{n}\,dS=-\frac{1}{7}\iint_S (3+6+2)\,dS=-\frac{11}{7}\iint_S dS$.

נטיל את $z=f(x,y)=\frac{6-3x-6y}{2}$ על מישור (x,y). נחשב: $\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}=\sqrt{1+\frac{9}{4}+9}=\frac{7}{2}$

לכן: $-\frac{11}{7}\iint_S dS=-\frac{11}{7}\cdot\frac{7}{2}\iint_D dxdy=-\frac{11}{2}\iint_D dxdy=-\frac{11}{2}$.