קבוצת קנטור

1. בטופולוגיה, קבוצה A תקרא מושלמת (Perfect set) אם ניתן להתקרב ככל שנרצה לכל $x \in A$ ע"י איברים מ A. במילים אחרות קבוצה היא מושלמת אם אין לה נקודות מבודדות.

   א. הראו כי קבוצת קנטור C הינה מושלמת.

   בטופולוגיה, קבוצה A תקרא דלילה (nowhere dense set) אם $Int\left(Cl\left(A\right)\right)=\varnothing$. במילים, A תקרא דלילה אם הפנים של הסגור של A הינה קבוצה ריקה.

   ב. הראו כי קבוצת קנטור C אותה ראינו בתרגול הינה דלילה.

2. ראינו בתירגול שאם המידה של קבוצה סגורה (קבוצת קנטור למשל) הינה 0 אז היא איננה יכולה להכיל אף קטע פתוח. האם הכיוון השני נכון גם כן? האם קבוצה דלילה בהכרח תהיה בעלת מידה 0?

   נבנה דוגמה נגדית. תהי $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ סדרה של מספרים ממשיים חיוביים כך ש $0<\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}c_k<1$ בדומה לאופן בו בנינו את קבוצת קנטור C, נוריד ממרכז הקטע $[0,1]$ קטע באורך c_k על מנת לקבל את הקבוצה $\widehat{C}_1$. כעת נוריד ממרכז כל אחד משני הקטעים שנשארו קטעים באורך c_2 על מנת לקבל את הקבוצה $\widehat{C}_2$. בשלב ה k נוריד 2^{k-1} קטעים ממרכז כל אחד מהקטעים שנשארו מהשלב ה $k-1$ על מנת לקבל את הקבוצה $\widehat{C}_k$. נגדיר את $\widehat{C}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\widehat{C}_k$ להיות קבוצת קנטור המוכללת.

   א. הראו כי $\widehat{C}$ קבוצת קנטור המוכללת הינה קומפקטית ומושלמת.

   ב. הראו כי $\widehat{C}$ הינה דלילה.

   ג. הראו כי $m\left(\widehat{C}\right)=1-\sum_{k=1}^{\infty}2^{k-1}c_k$.

   רמז : השתמשו בעובדה כי מידה היא "רציפה". כלומר , אם $\{A_n\}$ סדרה של קבוצות כך ש $A_k \supseteq A_{k+1}$ ו $m\left(A_1\right)<\infty$ אזי $m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\lim_{n\to\infty}m\left(A_n\right)$.