בס"ד

מתמטיקה בדידה למהנדסים 1 תשע"ו

שאלות חזרה

1. א. נסח את הפרדוקס של ראסל.
ב. הוכח אותו.

2. א. נסח את חוקי דה-מורגן לקבוצות ולפונקציות בוליאניות.
ב. הוכח: $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\neq\varnothing$ (הדרכה: הוכח קיים אבר ממשי שאינו רציונלי).

3. א. הגדר: הפרש סימטרי. משלים.
ב. הוכח את הזהות הבוליאנית: $(x\wedge\neg y)\vee(\neg x\wedge y)\equiv(x\vee y)\wedge\neg(x\wedge y)$.
הסק: לכל שתי קבוצות B,A מתקיים $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.
ג. הוכח: האברים השייכים ל- $A_1\Delta A_2\Delta\ldots\Delta A_n$ הם האברים המופיעים במספר אי-זוגי של קבוצות.

4. א. הגדר: שוויון עוצמות. $\aleph_0$.
ב. הוכח : לכל קבוצה סופית A מסדר n מתקיים $|P(A)|=2^n$.
ג. הוכח : לכל קבוצה אינסופית A מתקיים $|P(A)|>|A|$.

5. א. הגדר: יחס בין קבוצות. היחס הריק. כפל יחסים.
ב. הוכח או הפרך: כפל יחסים הוא חילופי.

6. א. הגדר: היחס ההפכי. יחס הזהות.
ב. הוכח או הפרך: לכל יחס R מתקיים RR^{-1} שווה ליחס הזהות.

7. א. הגדר: קבוצת החזקה.
ב. הוכח או הפרך: לכל שתי קבוצות B,A מתקיים $P(A)\setminus P(B)=P(A\setminus B)$.

8. א. הגדר: יחס רפלקסיבי. יחס שקילות. יחס סדר.
ב. הוכח או הפרך: R רפלקסיבי אם ורק אם $R^2=R$.
ג. הוכח: אם R רפלקסיבי אז לכל n טבעי $R\subseteq R^n$.

9. א. הגדר: יחס סימטרי. יחס טרנזיטיבי. יחס קונגרואנציה מודולו n על השלמים.
ב. יהיו R,S יחסים סימטריים על קבוצה A. הוכח: $SR=RS$ אם ורק אם RS סימטרי.
ג. הוכח או הפרך: אם R יחס טרנזיטיבי אז R^2 יחס טרנזיטיבי.

10. א. הגדר: חלוקה של קבוצה. מחלקת שקילות. קבוצת מנה.
ב. הוכח: הראה בהינתן יחס שקילות R על קבוצה A, קבוצת מחלקות השקילות מהווה חלוקה של A.
ג. הוכח או הפרך: חיתוך\איחוד\הפרש של יחסי שקילות הוא יחס שקילות.

11. א. הגדר: פונקציה חלקית ושלמה.
ב. פונקציה היא הפיכה אם"ם היא חח"ע ועל.
ג. תהא $f:X\to Y$ פונקציה. $A,B\subseteq X$.
הוכח או הפרך: (1) $f(A)\cap f(B)=f(A\cap B)$. (2) $f(A)\cup f(B)=f(A\cup B)$.
ד. הוכח או הפרך: קיימת פונקציה חח"ע ועל מ $\mathbb{Q}$ ל $\mathbb{Z}$.

12. א. הגדר: יחס סדר. קס"ח. יחס סדר ליניארי.
ב. הוכח או הפרך: היחס ההפכי ליחס סדר הוא יחס סדר.
ג. האם היחסים הבאים איזומורפיים:
$(P(\{1,2,3\}),\subseteq)$ והמחלקים הטבעיים של 385 עם יחס חלוקה ללא שארית.
מחלקי 1024 עם יחס חלוקה ללא שארית. יחס סדר מילוני (=לקסיקוגרפי) על $\{0,1\}^9$.

13. א. הגדר יחס אי-שוויון בין עוצמות. $\aleph$.
ב. תהא A קבוצה אינסופית ויהא x אבר ב A. הוכח: $|A\setminus\{x\}|=|A|$.
ג. הוכח או הפרך: $|[0,3]|=\aleph$. כאשר [a,b] הוא הקטע הסגור בין a ל b.

14. א. נסח את משפט דילוורת'.
ב. הוכח: בכל שרשרת שהיא גם אנטי שרשרת יש אבר אחד בלבד.
ג. תהא $(A,\leq)$ קס"ח סופית.
הוכח: המספר המינימלי של אנטי-שרשראות שמהוות חלוקה של A שווה לאורך הקס"ח $(A,\leq)$.

15. א. נסח והוכח את עקרון שובך היונים.
ב. הוכח: בתוך ת"ק של n+1 אברים מתוך הקבוצה {1,2,…,2n} יש בהכרח שני מספרים a,b כך ש a מחלק את b ללא שארית.

16. א. נסח את משפט שרדר-ברנשטיין.
ב. הוכח: $|\{q\in\mathbb{Q}:0<q<1\}|=\aleph_0$.
ג. הוכח: $|\mathbb{R}|>\aleph_0$.

17. א. הגדר: פונקציה חח"ע. תמורה.
ג. כמה העתקות חח"ע ועל יש מהקבוצה $\{a,b,1,\varnothing\}$ לעצמה ?

18. א. נסח את משפט בית המלון של הילברט. נסח את השערת הרצף.
ב. הוכח או הפרך: אם $|A|=|B|$ אז $|A\setminus B|=|B\setminus A|$.
ג. הוכח: לכל קבוצה אינסופית A מתקיים $|A|\geq\aleph_0$.

19. א. הגדר: פונקציה בוליאנית. שקילות של פונקציות בוליאניות.
ב. הוכח: לכל פונקציה בוליאנית קיימת פונקציה בוליאנית שקולה שצורתה DNF.
ג. מצא צורת CNF של הפונקציה הבוליאנית עם שלשה משתנים הנותנת ערך 1 אם"ם הם שווים.

20. א. הגדר: צורה CNF של פומקציה בוליאנית.
ב. הוכח: לכל פונקציה בוליאנית קיימת פונקציה בוליאנית שקולה שצורתה CNF.
ג. פשט את הפונקציה הבאה $(x\to x)\to(y\wedge\neg y)$.

21. א. הגדר: צורה DNF של פונקציה בוליאנית.
ב. מצא צורות CNF ו DNF של הפונקציות הבאות ופשט אותן ככל האפשר:
(1) $(x\leftrightarrow y)\to(y\wedge\neg z)$. (2) $(x\vee\neg x)\vee(y\wedge x)\vee(x\vee y)\to 1$.

22. א. הגדר מערכת שלמה של פונקציות בוליאניות.
ב. הוכח: המערכת $\{\neg,\wedge\}$ שלמה.
ג. הוכח: המערכת $\{\neg,\to\}$ שלמה.