בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה תשע"ו מועד א סמסטר א

מרצה: ד"ר אפי כהן   מתרגלת: יפית נתני

משך המבחן: שלוש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.

הוראות הפעלה:

יש לענות **בפירוט** על כל חמשת השאלות, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

ציון:

בהצלחה

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 1

נתונות הקבוצות A,B . הוכיחו ש $A\cap B=(A\cup B)\setminus((A\setminus B)\cup(B\setminus A))$.

<u>פתרון שאלה 1</u>

$$(A\cup B)\setminus((A\setminus B)\cup(B\setminus A))=(A\cup B)\cap\left(\left(A\cap B^c\right)\cup\left(B\cap A^c\right)\right)^c=$$

$$(A\cup B)\cap\left(A\cap B^c\right)^c\cap\left(B\cap A^c\right)^c=(A\cup B)\cap\left(A^c\cup B\right)\cap\left(B^c\cup A\right)$$

$$=(A\cup B)\cap\left(\left(A^c\cap\left(B^c\cup A\right)\right)\cup\left(B\cap\left(B^c\cup A\right)\right)\right)$$

$$=(A\cup B)\cap\left(\left(\left(A^c\cap B^c\right)\cup\left(A^c\cap A\right)\right)\cup\left(\left(B\cap B^c\right)\cup(B\cap A)\right)\right)$$

$$=(A\cup B)\cap\left(\left(A^c\cap B^c\right)\cup(A\cap B)\right)=$$

$$=\left((A\cup B)\cap\left(A^c\cap B^c\right)\right)\cup\left((A\cup B)\cap(A\cap B)\right)=A\cap B$$

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 2

תהי $A=\{1,2,3\}$.

א. רשמו במפורש את קבוצת החזקה $P(A)$.

ב. נתונה פונקציה $f:P(A)\to P(A)$ המוגדרת ע"י $f(B)=A\setminus B$.

i. חשבו את $f(\varnothing), f(\{1\}), f(\{1,2\})$.

ii. הוכיחו שהפונקציה הנתונה $f:P(A)\to P(A)$ חח"ע.

iii. הוכיחו שהפונקציה הנתונה $f:P(A)\to P(A)$ על.

פתרון שאלה 2

א. $P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$.

ב. הפונקציה $f:P(A)\to P(A)$ מוגדרת ע"י $f(B)=A\setminus B$.

i. $f(\varnothing)=A\setminus\varnothing\to f(\varnothing)=A$, $f(\{1\})=A\setminus\{1\}\to f(\{1\})=\{2\}$

$f(\{1,2\})=A\setminus\{1,2\}\to f(\{1,2\})=\varnothing$

ii. נניח ש $B_1,B_2\in P(A)$ כך ש $f(B_1)=f(B_2)$ ז"א $A\setminus B_1=A\setminus B_2$.

נוכיח ש $B_1=B_2$.

$x\in B_1\leftrightarrow x\notin A\setminus B_1\leftrightarrow x\notin A\setminus B_2\leftrightarrow x\in B_2$.

המעבר הראשון נובע מהגדרת ההפרש ומכיוון ש $B_1\subseteq A$. המעבר השני נובע מהנתון ש $A\setminus B_1=A\setminus B_2$. המעבר השלישי נובע מהגדרת ההפרש ומכיוון ש $B_2\subseteq A$.

iii. יהי $C\in P(A)$. $C\in P(A)\to C\subseteq A\to A\setminus C\subseteq A\to A\setminus C\in P(A)$.

$$f(A\setminus C)=A\setminus(A\setminus C)=A\cap(A\cap C^c)^c=A\cap(A^c\cup C)=(A\cap A^c)\cup(A\cap C)$$
$$=\varnothing\cup(A\cap C)=A\cap C=C$$

השוויון הראשון נובע מהגדרת ההפרש והמשלים.

השוויון השני נובע מכללי דה מורגן.

השוויון השני נובע מכלל הפילוג.

השוויון הרביעי נובע מהגדרת המשלים והחיתוך.

השוויון כחמישי נובע מהעובדה שלכל קבוצה A מתקיים $\varnothing\cup A=A$.

השוויון השישי נובע מהעובדה ש $C\subseteq A\to A\cap C=C$.

הראינו שלכל קבוצה $C\in P(A)$ מתקיים $f(A\setminus C)=C$, ולכן הפונקציה על.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 3 (20 נקודות)

נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3\}$.

א. רשמו את כל החלוקות של הקבוצה הנתונה.

ב. תנו דוגמה ליחס שקילות מעל A.

פתרון שאלה 3

א.

$\{1,2,3\}$

$\{1\},\{2,3\}$

$\{2\},\{1,3\}$

$\{3\},\{1,2\}$

$\{1\},\{2\},\{3\}$

ב. כל חלוקה משר יחס שקילות. ניעזר בחלוקה $\{2\},\{1,3\}$ ונקבל את היחס שקילות $E=\{(2,2),(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)\}$

שאלה 4

א. חמישה אנשים עומדים בשורה.
בכמה אפשרויות ניתן לסדר את האנשים כך שאף אחד מהם לא יעמוד במקומו המקורי.

ב. כמה מילים שונות בנות 9 אותיות (לאו דווקא בעלות משמעות) ניתן ליצור מ-7-A ים ו-2-B ים?

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב

פתרון שאלה 4

א. נסמן A_i קבוצת כל האפשרויות כך שהאדם במקום ה i נשאר במקומו.
נסמן X קבוצת כל האפשרויות לסדר חמישה אנשים בשורה.
יש לחשב $\left|X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right)\right|$. מכיוון ש $\bigcup_{i=1}^{5} A_i \subseteq X$ נקבל
$\left|X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right)\right| = |X| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right)\right| = 5! - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right)\right|$.
נשאר לחשב $\left|\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right)\right|$. נשתמש בעיקרון ההכלה וההדחה.
$|A_i| = 4!$ לכל $1 \le i \le 5$, ולכן $\sum_{i=1}^{5} |A_i| = 5 \cdot 4! = 5!$.
$|A_i \cap A_j| = 3!$ לכל $1 \le i < j \le 5$, ולכן $\sum_{1 \le i < j \le 5} |A_i| = \binom{5}{2} \cdot 3! = \frac{5!}{2!}$.
וכו'...
סה"כ נקבל $|X| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{5} A_i\right)\right| = 5! - 5! + \frac{5!}{2!} - \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{4!} - \frac{5!}{5!} = 44$

ב. יש $\binom{9}{2}$ אפשרויות לבחור את המקום של B ועבור כל בחירה כזאת נקבל סידרה אחד, ולכן סה"כ מספר הסדרות הוא $\binom{9}{2} = 36$.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 5

א. רשום את הפתרון הכללי עבור נוסחת הנסיגה $f(n)=7f(n-1)-6f(n-2)$.

ב. רשום פתרון פרטי לנוסחת הנסיגה $f(n)=7f(n-1)-6f(n-2)+3^n$.

ג. רשום פתרון כללי לנוסחת הנסיגה $f(n)=7f(n-1)-6f(n-2)+3^n$.

פתרון שאלה 5

א. המשוואה האופיינית היא $x^2-7x+6=0 \leftarrow (x-1)(x-6)=0$.
הפתרונות של המשוואה האופיינית הן $1^n, 6^n$.
הפתרון הכללי הוא $f(n)=c_1+c_2\cdot 6^n$.

ב. הפתרון הפרטי הוא מהצורה
$f(n)=a\cdot 3^n \leftarrow f(n-1)=a\cdot 3^{n-1} \leftarrow f(n-2)=a\cdot 3^{n-2}$.
נציב בנוסחת הנסיגה $f(n)=7f(n-1)-6f(n-2)$ ונקבל
$a\cdot 3^n=7a\cdot 3^{n-1}-6a\cdot 3^{n-2}+3^n \to 9a=21a-6a+9 \to -6a=9 \to a=-\frac{3}{2}$.
הפתרון הפרטי הוא $f(n)=-\frac{3}{2}\cdot 3^n$.

ג. פתרון כללי של נוסחת הנסיגה ההומוגנית המתאימה ועוד פתרון פרטי של הנוסחה הלא הומוגנית נותן פתרון כללי לנוסחה הלא הומוגנית ז"א
$f(n)=c_1+c_2\cdot 6^n-\frac{3}{2}\cdot 3^n$