בוחן לדוגמא

יש לבחור שלוש שאלות מתוך ארבעת השאלות.   משך הבוחן: 100 דקות

שאלה 1

חשב את האינטגרלים הלא מסוימים הבאים:

א. $\int \sin x \cos 5x dx$.

ב. $\int \frac{1-3\sin 2x}{1+\cos 2x} dx$

שאלה 2

א. חשב את אורך העקום $y=\frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}$ בתחום $0 \le x \le 3$.

ב. רשום באמצעות נוסחת נסיגה פתרון ל $\int x^n \sin x dx$.

שאלה 3

א. חשב את האינטגרל הלא אמיתי $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx$.

ב. קבעו התכנסות/התבדרות של $\int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{x} dx$.

שאלה 4

א. בדוק התכנסות של $\int_1^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+1} dx$.

ב. נתונה הפונקציה $f(x)=x\sqrt{\ln x}$. השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה $f(x)$, הישר $x=3$

וציר ה x מסתובב סביב ציר ה x . חשב את נפח גוף הסיבוב המתקבל.

פתרון 1

א. נשתמש בזהויות $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$

$$\int \sin x\cos 5x dx = \int \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin(-4x))dx = \int \frac{1}{2}(\sin 6x - \sin(4x))dx = -\frac{1}{12}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos 4x + c$$

ב. נציב $t = tgx$ ואז $dx = \frac{dt}{1+t^2}, \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos 2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\int \frac{1-3\sin 2x}{1+\cos 2x}dx = \int \left(1-\frac{6t}{1+t^2}\right):\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{t^2-6t+1}{1+t^2}:\left(\frac{2}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t^2-6t+1}{2+2t^2}dt = \frac{1}{2}\int\left(\frac{t^2+1}{t^2+1}-\frac{6t}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(1-3\cdot\frac{2t}{t^2+1}\right)dt = \frac{t}{2}-\frac{3}{2}\ln\left(t^2+1\right)+c = \frac{tgx}{2}-\frac{3}{2}\ln\left((tgx)^2+1\right)+c$$

פתרון 2

א. נשתמש בנוסחה לחישוב אורך עקום $\int\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$.

$$y = \frac{2}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$y' = 2x\cdot\sqrt{\left(1+x^2\right)}$$

$$\left(y'\right)^2 = 4x^2\cdot\left(1+x^2\right)$$

נשאר לחשב $\int_0^3\sqrt{1+4x^2+4x^4}dx = \int_0^3\left(1+2x^2\right)dx = \left[x+\frac{2x^3}{3}\right]_0^3 = 21$.

ב. נסמן $I_n = \int x^n\sin x dx$ נחשב תחילה את I_1.

$$I_1 = \int x\sin x dx = -x\cos x + \sin x$$

נחשב את $I_n = \int x^n\sin x dx$ בעזרת אינטגרציה בחלקים ונקבל

$$I_n = \int x^n\sin x dx = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x dx = -x^n\cos x + n\left(x^{n-1}\sin x\right) - n(n-1)\int x^{n-2}\sin x dx =$$

$$= -x^n\cos x + nx^{n-1}\sin x - n(n-1)I_{n-2}$$

פתרון 3

א. נציב $t = \arctan x$ מכיוון ש $\lim_{x\to-\infty}\arctan x = -\frac{\pi}{2}$, $\arctan 0 = 0$ ו $dt = \frac{dx}{1+x^2}$

נקבל: $\int_0^{\infty}\frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$.

ב. לכל $1 < x$ נקבל ש $\frac{\pi}{4} < \arctan x$ ולכן $\frac{\pi}{4x} < \frac{\arctan x}{x}$. מכיוון ש $\int_1^{\infty}\frac{\pi}{4x}dx$ מתבדר נקבל

ממבחן ההשוואה הראשון ש $\int_1^{\infty}\frac{\arctan x}{x}dx$ מתבדר.

<u>פתרון 4</u>

א. נשתמש במבחן דיריכלה.

נסמן ; $f(x) = \sin x$ $\quad g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ ונבדוק את התנאים של מבחן דיריכלה.

לכל x מתקיים $\left|\int_0^x f(t)dt\right| = |1-\cos x| \le 2$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

כדי להוכיח שפונקציה $g(x)$ מונוטונית יורדת נחשב את הנגזרת $g'(x)$

$$g'(x) = \frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$g'(x) < 0$ לכל $x > 1$, לכן $g(x)$ יורדת החל מ $x > 1$

התנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן האינטגרל מתכנס.