אינפי 4 – תרגיל 3

אינטגרל קווי/מסילתי של תבנית / פונקציה וקטורית / שדה וקטורי $\underline{\omega} = (w_1, \dots, w_n)$ לאורך מסילה $\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ מסומן $\int_\gamma \underline{\omega} \cdot \underline{dx}$, ומחושב בתנאים מסויימים שמאפשרים זאת על ידי $\int_\gamma \underline{\omega}(\gamma(t)) \cdot \underline{\gamma'}(t)dt$, כשנקודה מסמנת מכפלה פנימית בין וקטורים. נשתמש במונחים תבנית דיפ' / שדה כאחד.

---

1. חשבו את האינטגרל $\int_\gamma \underline{\omega} \cdot \underline{dx}$ עבור פונקציה וקטורית $\omega(x) = (x-2y, x+2y)$, לאורך מסילה שמוגדרת על ידי : $x^2 + y^2 = 1 , y \geq 0$ מהנקודה $(1,0)$ עד הנקודה $(-1,0)$, בכיוון הטריגונומטרי.

2. חשבו את האינטגרל $\int_\gamma \underline{\omega} \cdot \underline{dx}$ עבור התבנית הדיפרנציאלית : $\underline{\omega}(x,y) = x^2dx + ydy$

לאורך מסילה שהיא המשולש שקודקודיו: (0,0) , (1,1) ,(1,0) בכיוון הטריגונומטרי.

3. תהי $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה , פונקציה ממשית גזירה ברציפות ותהי מסילה

$\gamma: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות גם היא. אז קיים : $\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$, כשמצד שמאל זהו אינטגרל מסילתי של הדיפרנציאל ביחס למסילה הנתונה.

(רמז: הסתכלו בפונקציה הממשית : $g \coloneqq f \circ \gamma$ ...).

4.הראו כי פונקציה וקטורית "רדיאלית" (כלומר שערכה בוקטור תלוי בגודלו) ,מהצורה :

$F: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$, $F(x) = \varphi(\|x\|) \cdot x$, עבור פונקציה ממשית $\varphi: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ורציפה – היא שדה משמר (או לחילופין – שהתבנית הדיפרנציאלית שמוגדרת על ידה היא מדוייקת) .

(רמז : הסתכלו ב- $f(x) \coloneqq \int_1^{\|x\|} s\varphi(s)ds , x \neq \underline{0} = (0,0,\dots,0)$)